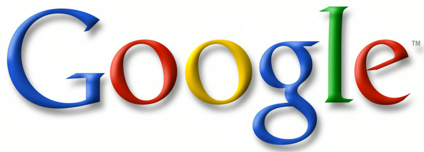
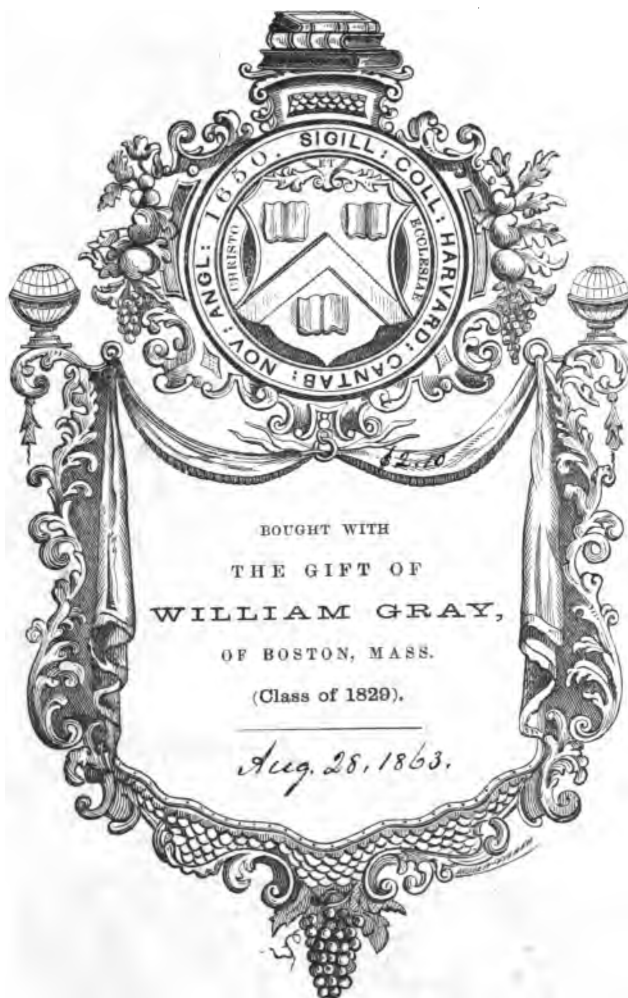
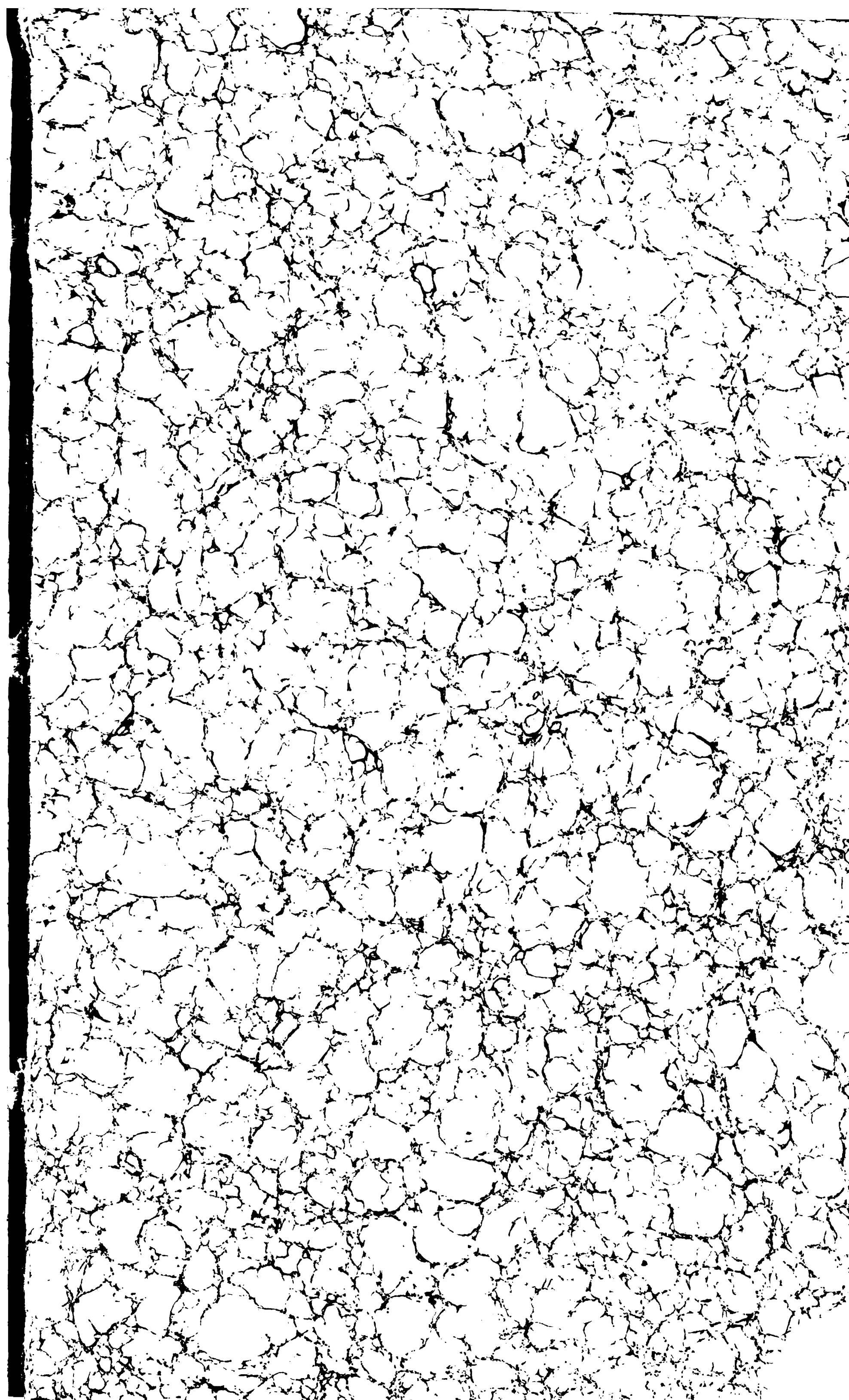





SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE
$2.10
BOUGHT WITH
THE GIFT OF
WILLIAM GRAY,
OF BOSTON, MASS.
(Class of 1829).
Aug. 28, 1863.



GRUNDLINIEN

DER

NEUEREN GEOMETRIE

MIT BESONDERER BERÜCKSICHTIGUNG

DER METRISCHEN VERHÄLTNISSE AN SYSTEMEN VON PUNKTEN IN EINER GRADEN UND EINER EBENE.

VON

DR. BENJAMIN WITZSCHEL,

LEHRER DER MATHEMATIK AM KRAUSE'SCHEN INSTITUT IN DRESDEN.



MIT IN DEN TEXT GEDRUCKTEN HOLZSCHNITTEN.

LEIPZIG

VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1858.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN DRESDEN.

Vorwort.

Vorliegende Grundlinien der neueren Geometrie sind für den ersten Unterricht in diesem Zweige der Mathematik bestimmt. Die ganz elementare Entwickelung des Gegenstandes dürfte nebenbei in besonderen Fällen Lehrer der Geometrie veranlassen, einige Partien oder Sätze der neuern Geometrie in den zeither üblichen Unterrichtscursus mit aufzunehmen. Nähere Andeutungen hierüber zu geben halte ich für überflüssig.

Ich habe mich bemüht, das noch einigermaassen zerstreute Material der neuern Geometrie in einer für deren erstes Studium angemessenen Weise zusammenzustellen. Bei den verschiedenartigen Richtungen, welche die Forschungen auf diesem Gebiete verfolgen, ist es nicht leicht, eine einheitliche Darstellung zu gewinnen. Gleichwohl ist für eine erste Unterweisung in einem fremden Gebiete nichts nothwendiger, als dieses, und man muss deshalb das Streben, möglichst allseitigen Ueberblick über das ganze Gebiet zu geben, häufiger zurückdrängen, als man sonst ohne diese Rücksicht und einzig in Hinblick auf eine gewisse Vollständigkeit oder gar Erschöpfung des vorliegenden Materials sich vornehmen würde.

Von den Beziehungen, in welche die geometrischen Figuren durch die Lehren der neueren Geometrie zu einander gebracht werden, habe ich die metrischen einer vorzugsweisen Berücksichtigung unterworfen, weil ich der Meinung bin, dass von dem dadurch gewonnenen Standpunkte aus der erste Eingang in das Gebiet der neueren Geometrie der leichtere ist. Ich glaube nicht, diese Ansicht noch besonders vertheidigen

zu müssen, verhehle mir allerdings auch nicht, dass ich hierin vielleicht Widersacher finden werde, welche die gegebene Darstellungsweise als eine dem Geiste der neueren Geometrie fremdartige verbannt oder wenigstens nicht so hervorgehoben sehen möchten. Ich halte letztere für eine irrige Ansicht, die mit noch andern damit verwandten aus der nicht eben selten anzutreffenden Verwechslung von „Geometrie der Lage" mit „neuerer Geometrie" hervorgegangen sein kann. Wenn für erstere als einem Theile der letzteren eine entschieden rein geometrische Darstellung verlangt wird, so ist dasselbe doch nicht nöthig für die neuere Geometrie im Allgemeinen.*)

Der oben ausgesprochene Zweck brachte es von selbst mit sich, dass ich mich bei der Auswahl und Darstellung des Materials zu vorliegenden Grundlinien an die Schriften und Originalarbeiten von verhältnissmässig nur wenig Mathematikern, die auf diesem Felde der Literatur einen längst anerkannten Namen besitzen, gehalten habe. Schon eine flüchtige Durchsicht des Büchleins wird erkennen lassen, dass namentlich der barycentrische Calcul, sowie die späteren Abhandlungen desselben Meisters auf diesem Gebiete, welche grossentheils den Abhandlungen und Berichten der K. S. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig eingereiht sind, mir vorgelegen haben. Ausserdem ist, insbesondere im vierten Capitel, theilweise auch im dritten und sechsten das vortreffliche Werk von Chasles: *Traité de Geometrie Supérieure* benutzt worden. Das gleichfalls rühmlichst bekannte bis jetzt leider unvollendete

---

*) Wie künstlich übrigens eine streng geometrische Darstellung der Geometrie der Lage ausfällt wird Jeder an der in ihrer Art so vortrefflichen „Geometrie der Lage" von v. Staudt (Nürnberg, 1847, wozu neuerdings eine in demselben Sinne verfasste Fortsetzung unter dem Titel: „Beiträge zur Geometrie der Lage" 1856 erschienen ist) erkannt haben und der genannte Herr Verfasser würde wohl selbst gegen eine Erklärung, dass sein System für den ersten Unterricht oder zur Einführung in das Gebiet der neueren Geometrie nicht zu wählen sei, wenig einzuwenden haben. Jeder Andere aber wird sich, wenn noch nöthig, davon überzeugen können, wenn er z. B. die in der genannten Schrift S. 43 gegebene Erklärung der harmonischen Lage von vier in einer Graden liegenden Punkten vergleicht und sich fragt, ob diese Definition zugleich einen naturgemässen Weg zur Aufstellung des definirten Begriffes in sich enthält.

Werk von Steiner: „Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten“ etc. hat in den die Kegelschnitte und den Kreis betreffenden Capiteln mir reichhaltige Vorlagen gegeben, doch musste ich, um den Umfang dieser Grundlinien nicht zu gross werden zu lassen, einstweilen davon absehen, dieses schon sehr umfängliche Material mit aufzunehmen. Sollte die Darstellung des bis dahin aufgenommenen Inhalts einige Anerkennung finden und dem Büchlein freundliche Aufnahme bereiten, so dürfte sich mein Wunsch, in diesem Sinne eine Fortsetzung davon zu geben, leicht in Ausführung bringen lassen.

Obwohl ich in eine nähere Auseinandersetzung der Formen, welche ich bei Entwickelung und Einkleidung der betreffenden Sätze gewählt habe, hier nicht eingehen kann, sondern eine vorläufige Durchsicht des Inhalts empfehle, so will ich doch über einzelne Punkte eine kurze Erläuterung noch beifügen.

Das Princip der Zeichen habe ich nach dem Vorgange von Herrn Möbius, welcher dasselbe zuerst und in allen seinen Schriften consequent durchgeführt und beibehalten hat, streng beobachtet. Für das Weitere darüber möge man das erste einleitende Capitel vergleichen.

Die symbolische Bezeichnung des Doppelverhältnisses habe ich dem barycentrischen Calcul entnommen und derselben auch die symbolische Bezeichnung der im fünften Capitel erörterten absoluten Doppelverhältnisse und der Doppelwinkel angepasst, bin also von der spätern, vom Herrn Möbius in seiner „Kreisverwandtschaft“ gegebenen Bezeichnung etwas abgewichen, was mit Rücksicht auf Gleichmässigkeit in der Bezeichnungsweise sich wohl rechtfertigen lassen wird. Eine entsprechende symbolische Bezeichnung habe ich auch für die Involution angegeben, musste mich aber in dessen Gebrauche etwas beschränken, weil ich zugleich einen etwas zusammengesetzteren Algorithmus für diese Bezeichnungsart hätte einfügen müssen, wovon aber aus anderweitigen Rücksichten vorläufig noch abzusehen war.

Dass die Verwandtschaft der Reciprocität der Collineation nicht mit beigefügt worden ist, dafür sind in einer Schlussbemerkung die Gründe angegeben worden.

Sollten vorliegende Grundlinien etwas zur Anregung für das Studium der neueren Geometrie mit beitragen und namentlich zu näherer Einsicht und gründlichem Studium der Originalschriften und Werke bereits oben genannter Meister der Wissenschaft Möbius, Steiner, Chasles, v. Staudt Veranlassung geben, so könnte der Zweck dieser Blätter als hinlänglich erreicht bezeichnet werden. An einer eleganten Ausstattung derselben hat die Verlagsbuchhandlung ersichtlicher Weise es nicht fehlen lassen.

Dresden, im November 1857.

Witzschel.

Inhalt.

Erstes Capitel.

Einleitung.

Princip der Zeichen und dessen Anwendung auf Abschnitte einer Graden, auf Winkel und Flächenräume einer Ebene. §. 1 — 24.

Zweites Capitel.

Von den Doppelverhältnissen.

§. 25. Erklärungen. 26. Relative Lage der vier Punkte eines D-V. 27. 28. 29. Beziehungen zwischen D-VV. derselben 4 Punkte. 30. D-V. bei 6 Punkten. 31. Beziehungen zwischen 3 D-VV. bei 5 Punkten. 32. D-V. bei n Punkten einer Graden. 33. D-VV. von 4 Graden. 34. Beziehungen zwischen den D-VV. derselben 4 Graden. 35. Beziehungen der D-VV. von 4 Graden und 4 Punkten. 36. Folgesätze. 37. Relationen zwischen D-VV. auf 5 Graden. 38. Lehrsatz. 39. Andere Ausdrücke für D-VV. zwischen 4 Punkten oder Strahlen. 40. Zurückführung eines D-V. auf ein einfaches. 41. Construction des 4. Punktes oder Strahles eines D-V.

Drittes Capitel.

Das harmonische Verhältniss.

§. 42. Definitionen. 43. Theilung eines Abschnitts nach einerlei Verhältniss. 44. Zusätze, Lagenverhältnisse von 4 harmonischen Punkten. 45. Erklärung. Harmonisches Strahlenbüschel. 46. Harmonische Lage von 4 Strahlen in besondern Fällen. 47. Metrische Verhältnisse bei 4 harmonischen Punkten oder Strahlen. 48. Andere Ausdrücke für das harmonische Verhältniss. 49 — 53. Ausdrücke und Relationen für das harmonische Verhältniss unter Zuziehung eines beliebigen 5. Punktes. 54. Ausdrücke unter Zuziehung zweier beliebigen Punkte. 55 — 59. Bestimmung eines harmonischen Punktes oder Strahles, wenn die andern drei oder deren

stellvertretende Elemente gegeben sind. 60. Harmonische Verhältnisse am vollständigen Vierseit und Viereck. 61. Definitionen (vollständige Figuren betreffend). 62. Anderer Ausdruck des Satzes in 60. 63—64. Construction eines 4. harmonischen Punktes oder Strahles.

Viertes Capitel.

Von den Involutionen.

§. 65. Definition von Involution. 66. Lehrsatz. 67. Vier andere Involutionsgleichungen. 68. Lehrsatz. 67. Symbolische Ausdrücke für die Involution. 69. Zusammenstellung der bisherigen Involutionsgleichungen. 70. Noch andere die Involution bezeichnende Ausdrücke. 71. Lagenverhältnisse von 3 in Involution stehenden Punktepaaren. 72. Involution zwischen mehr als 3 Punktepaaren. 73. Centralpunkt. 74. Lage des Centralpunktes. 75. Bedeutung des Centralpunktes für 3 und mehrere involutorische Paare; dritte Definition der Involution. 76. Lehrsätze. 77. Bestimmung des Centralpunktes. 78. Doppelpunkte der Involution. 79. Harmonie der Doppelpunkte mit den involutorischen Punktepaaren. 80. Involution der Doppelpunkte mit vier zu allen möglichen Paaren combinirten Punkten. 81. Lehrsatz. Der Centralpunkt in der Mitte zwischen beiden Doppelpunkten. 82. Symmetrische Involution. 83. Construction der Doppelpunkte. 84. Construction des 6. Punktes der Involution. 85. Involutorische Strahlenbüschel. 86. Folgesätze. 87. Doppelstrahlen eines involutorischen Strahlenbüschels. 89. Folgesätze. 90—98. Lehrsätze und anderweitige Involutionsgleichungen. 99. Aufgaben. 100. Involutionen am vollständigen Viereck und Vierseit.

Fünftes Capitel.

Geometrische Deutung und Construction imaginärer Werthe und Formen; complexe Doppelverhältnisse und Involutionen.

§. 101. Vorbemerkungen. 102. Richtungsfactor einer Strecke. 103. Besondere Werthe des Richtungsfactors. 104. Zusätze. 105. Lehrsatz. 106. Zusätze. 107. Reduction eines Vierecks auf ein Dreieck. 108. Zusätze. 109. Einfache Verhältnisse zwischen complexen Abschnitten und Construction eines complexen Verhältnisses. 110. Zusätze. 111. Complexes D-V. 112. Symbolische Bezeichnung eines complexen D-V. 113. D-VV. und Doppelwinkel derselben 4 Punkte einer Ebene. 114. Zusätze. 115. Complexe D-VV. bei 5 und mehreren Punkten einer Ebene. 116. Zurückführung eines complexen D-V. auf ein ein einfaches; Beispiele. 117. Beispiel mit 5. D-VV. und Doppelwinkeln und Aufgabe. 118. Construction des 4. Punktes eines complexen D-V., wenn 3 Punkte und der Werth desselben gege-

ben sind. 119. Zusätze und Folgerungen. 120. Besondere Fälle. 121. Harmonische Lage von 4 Punkten einer Ebene. 122. Construction des 4. harmonischen Punktes zu drei gegebenen der Ebene. 123. Constr. zweier zugeordneter harmonischer Punkte, wenn in der Ebene die beiden andern und die Mitte der gesuchten gegeben sind. 124. Bestimmung imaginärer Durchschnittspunkte eines Kreises und einer ausserhalb desselben liegenden Graden. 125. Imaginäre Durchschnittspunkte, gemeinschaftliche Sehne, Chordale zweier und mehrerer Kreise. 126. Involution von sechs Punkten einer Ebene, complexes Dreieckschnittsverhältniss. 127. Auflösung und geometrische Bedeutung der Gleichungen *B* des §. 126. 128. Centralpunkt involutorischer Punkte einer Ebene. 129. Construction des Centralpunktes 130. Zusätze und Folgerungen. 131. Doppelpunkte der Involution. 132. Besondere Fälle der Involution von Punkten einer Ebene.

Sechstes Capitel.

Von den geometrischen Verwandtschaften der Figuren.

§. 133. Vorbemerkungen. 134. Erklärungen. 135—140. Lehrsätze, bezüglich der Collineation von Punktreihen und Strahlbüscheln. 141. Metrische Verhältnisse und Gleichungen für die Collineation zweier Punktreihen oder Strahlbüschel. 142. Geometrische Bedeutung und Construction der Constante λ. 143. Anderer Ausdruck für die Collineation der Punkte zweier Graden. 144. Dritter Ausdruck für die Collineation geradliniger Punktreihen. 145. Zusätze. 146. Vierter Ausdruck für die Collineation geradliniger Punktreihen. 147. Allgemeinste Gleichung der Collineation zweier geradliniger Punktreihen. 148. Metrische Relation für collineare Strahlenbüschel. 149. Collineare Punktreihen auf einer und derselben Graden. 150. Zusätze. 151. Doppelpunkte ähnlicher, einstimmig gleicher und symmetrischer Reihen. 152. Bedingungsgleichungen für das Zusammenfallen der beiden Doppelpunkte in einem einzigen. 153. Eigenthümlichkeiten zweier collinearer Theilungen derselben Graden, wenn deren Doppelpunkte imaginär sind. 154. Anderweite Gleichungen für die collineare Theilung einer Graden. 155. Involutorische Theilung einer Graden als besonderer Fall der collinearen Theilung. 156. Zusätze. 157. Involutionen von Punkten zweier auf einer Graden liegenden collinearen Punktreihen. 158. Lehrsatz. 159. Construction der Doppelpunkte *E*, *F* und des Mittelpunktes *O* derselben. 160. Collineare Strahlbüschel mit demselben Mittelpunkte. 161. Collineation ebener Figuren. 162. Unendlich entfernte Punkte und Grade collinearer Figuren. 163. Geometrische Bedeutung der Constanten λ und μ der Gleichung (a) in §. 161 und Folgerungen. 164. Metrische Verhältnisse an collinearen Figuren. 165. Flächenrelationen. 166. Construction collinearer Figuren. 167. Collinear (perspectivisch) liegende Figuren; Lehrsatz. 168. Erklärungen und Zusätze. 169. Construction

collinear liegender Figuren, abgeleitet aus der allgemeinen Construction collinearer Figuren. 170. Metrische Relationen bei collinear liegenden Figuren. 171. Collineare Involution ebener Figuren. 172. Affinität ebener Systeme. 173. Gleichheit ebener Figuren. 174. Aehnlichkeit geradliniger und ebener Systeme. 175. Aehnlichgleichheit geradliniger und ebener Systeme. 176. Stellung beliebiger collinearer Figuren einer Ebene in collineare Lage zu einander. Schlussbemerkungen, die Reciprocität und Kreisverwandtschaft betreffend.

Erstes Capitel.

Einleitung.

---

§. 1.

Mit der Bezeichnung AB als der Zusammenstellung des Anfangs- und Endpunktes einer begrenzten Graden oder einer Strecke soll nicht blos die Länge des zwischen A und B enthaltenen Stückes der Graden, sondern auch die Richtung desselben in sofern angegeben werden, als man sich vorstellen kann, dass AB durch die Bewegung des Punktes A nach B erzeugt worden ist. Dagegen soll BA die durch Bewegung von B nach A entstandene Strecke, welche ebenso gross als die vorige ist, aber entgegengesetzte Richtung hat, bedeuten. Mit Anwendung der entgegengesetzten Vorzeichen auf Strecken von entgegengesetzter Richtung hat man daher

$$\text{I.} \qquad \begin{cases} BA = -AB \text{ oder} \\ AB + BA = 0. \end{cases}$$

§. 2.

Liegen die Punkte A, B, C in einer Graden, so hat man für jede Aufeinanderfolge derselben

$$\text{II.} \qquad \begin{cases} AB + BC + CA = 0, \text{ und hieraus} \\ AB - AC = CB \\ AB - CB = AC. \end{cases}$$

Der dritte Punkt C kann gegen die beiden erstern A und B nur drei verschiedene Lagen haben, nämlich 1) ausserhalb der Strecke AB auf der Seite von B, wobei die Aufeinanderfolge der Punkte A, B, C ist; oder 2) ausserhalb der Strecke AB auf der Seite von A, wobei

die Aufeinanderfolge der Punkte C, A, B ist; oder 3) zwischen A und B, wobei die Aufeinanderfolge der Punkte A, C, B ist. Nimmt man nun für alle drei Fälle die Richtung von A nach B als die positive an, so hat man im ersten Falle

$$AB + BC = AC$$

aber $AC = -CA$, folglich

$$AB + BC + CA = 0.$$

Im zweiten Falle hat man

$$CA + AB = CB = -BC,$$

folglich

$$CA + AB + BC = 0.$$

Im dritten endlich

$$AC + CB = AB,$$

oder

$$-CA - BC = AB,$$

folglich ebenfalls

$$AB + BC + CA = 0.$$

Bezüglich des zweiten und dritten Falles kann man auch, die Richtigkeit der Gleichung für den ersten vorausgesetzt, sagen: Da die Reihenfolge der Punkte des ersten A, B, C in die des dritten A, C, B übergeht, wenn man B mit C und C mit B vertauscht, und diese wieder in die zweite C, A, B, wenn man A mit C und C mit A vertauscht, diese Vertauschungen aber in dem Resultate

$$AB + BC + CA = 0$$

des ersten Falles nichts ändern; so gilt der Satz auch allgemein für alle drei Fälle.

Die beiden andern unter II. aufgeführten Beziehungen ergeben sich nach I. unmittelbar aus der so eben erwiesenen.

§. 3.

Zusätze. 1) Die zweite unter II. enthaltene Gleichung lässt auch folgende Fassung zu. Ist die Lage des Punktes A durch seine Entfernung von irgend einem Anfangs- oder Nullpunkte Q gegeben und will man denselben auf einen andern Nullpunkt Q' beziehen, so hat man hierzu immer

1) $$QA = Q'A - Q'Q$$

wie auch die gegenseitige Lage von Q, Q' und A in der Graden sein möge. (Veränderung des Coordinatenanfangs.)

2) Ebenso lässt sich jede Strecke AB durch die Entfernungen

ihrer Endpunkte von einem gemeinsamen Anfangspunkte Q wie folgt ausdrücken.

2) $$AB = QB - QA.$$

§. 4.

Sind A, B, C, ... N beliebige Punkte einer Graden in irgend welcher Aufeinanderfolge, so ist stets

III. $$AB + BC + \ldots + NA = 0.$$

Nimmt man nämlich an, der Satz habe Giltigkeit für eine gewisse Anzahl m Punkte A, B, C, ... L, M, dass also

$$AB + BC + \ldots + LM + MA = 0,$$

so folgt, dass, wenn man noch einen Punkt N hinzufügt, für den man nach II.

$$AM + MN + NA = 0$$

hat, auch

$$AB + BC + \ldots + LM + MA + AM + MN + NA = 0,$$

oder weil $MA + AM = 0$,

$$AB + BC + \ldots + LM + MN + NA = 0$$

ist; d. h. gilt der Satz für m Punkte einer Graden, so ist er auch für $m + 1$ Punkte, folglich allgemein richtig, da er für drei Punkte erwiesen ist.

§. 5.

Sind A und A' zwei Punkte einer Graden, bestimmt durch ihre Entfernungen QA und QA' von einem gemeinsamen Anfangspunkte, ferner M der Mittelpunkt der Strecke AA', so ist immer

3) $$\frac{QA + QA'}{2} = QM,$$

4) $$QA \,.\, QA' = \overline{QM}^2 - \overline{MA}^2 = \overline{QM}^2 - \overline{MA'}^2.$$

Man hat nämlich für die 3 Punkte Q, M, A

$$QA = QM + MA,$$

ebenso für Q, M, A'

$$QA' = QM + MA',$$

endlich für A, M, A'

$$MA = - MA'.$$

Addirt man die beiden ersten Gleichungen, so erhält man mit Berücksichtigung der dritten

$$QA + QA' = 2\,QM,$$

und durch Multiplication der beiden ersten

$$QA \,.\, QA' = \overline{QM}^2 - \overline{MA}^2 = \overline{QM}^2 - \overline{MA'}^2.$$

§. 6.

Sind A, A', B, B' Punkte einer Graden, M und N die Mitten der Abschnitte AA' und BB', so ist immer

5) $$\frac{AB + A'B'}{2} = \frac{AB' + A'B}{2} = MN.$$

Denn bezieht man die Punkte auf einen gemeinsamen Anfangspunkt Q, so ist

$$QM = \frac{QA + QA'}{2}, \quad QN = \frac{QB + QB'}{2},$$

folglich $QN - QM = MN = \frac{QB + QB' - QA - QA'}{2}$;

aber $QB - QA = AB, \quad QB' - QA' = A'B'$,

desgl. $QB - QA' = A'B, \quad QB' - QA = AB'$,

mithin $MN = \frac{AB + A'B'}{2} = \frac{AB' + A'B}{2}$.

§. 7.

Sind A, B, C, D vier Punkte einer Graden in beliebiger Aufeinanderfolge, so ist immer

IV. $$AB \,.\, CD + BC \,.\, AD + CA \,.\, BD = 0$$

Beweis. Es ist

$$AB = AD + DB, \quad BC = BD + DC, \quad CA = CD + DA;$$

multiplicirt man der Reihe nach diese Gleichungen mit CD, AD, BD, also:

$$AB \,.\, CD = AD \,.\, CD + DB \,.\, CD,$$
$$BC \,.\, AD = BD \,.\, AD + DC \,.\, AD,$$
$$CA \,.\, BD = CD \,.\, BD + DA \,.\, BD,$$

addirt dieselben und berücksichtigt man, dass $AD \,.\, CD + DC \,.\, AD = 0$ u. s. w. ist, die sechs Producte also auf der rechten Seite sich zu je zweien aufheben, so erhält man

$$AB \,.\, CD + BC \,.\, AD + CA \,.\, BD = 0{*})$$

---

*) Zur Bildung dieses Ausdrucks fügt man der gleichgerichteten cyklischen Folge der Buchstaben A, B, C

$ABC \quad BCA \quad CAB$

den vierten D an ein und derselben Stelle bei, also

§. 8.

Sind A, B, C, D vier beliebige Punkte einer Geraden, so ist bei jeder Aufeinanderfolge derselben

V. $AB \, . \, \overline{CD}^2 + BC \, . \, \overline{AD}^2 + CA \, . \, \overline{BD}^2 = - AB \, . \, BC \, . \, CA$

oder

$$\frac{\overline{AD}^2}{AB \, . \, AC} + \frac{\overline{BD}^2}{BC \, . \, BA} + \frac{\overline{CD}^2}{CA \, . \, CB} = 1.$$

Beweis. Multiplicirt man die Gleichungen

$$AB = AD + DB$$
$$BC = BD + DC$$
$$CA = CD + DA$$

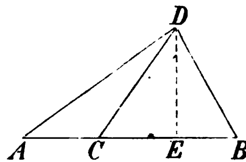
mit einander, und berücksichtigt dabei, dass beispielsweise $AD \, . \, DA = -\overline{AD}^2$ und $AD + DB = AB$ ist, so ergiebt sich obiges Resultat ohne Weiteres.

Der Satz behält seine Giltigkeit, auch wenn einer der vier Punkte z. B. D ausserhalb der Graden liegt, in welcher die drei andern enthalten sind.

Denn (Fig. 1) fällt man von D auf AB das Perpendikel DE, so hat man

$$\overline{AD}^2 - \overline{CD}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{CE}^2 = (AE - CE)(AE + CE)$$
$$= AC \, (AE + CE),$$
$$\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{BE}^2 = (AE - BE)(AE + BE)$$
$$= AB \, (AE + BE).$$

Fig. 1.



Hieraus folgt weiter

$$(\overline{AD}^2 - \overline{CD}^2) \, AB = AB \, . \, AC \, (AE + CE),$$
$$(\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2) \, AC = AB \, . \, AC \, (AE + BE)$$

und nach Subtraction beider Gleichungen von einander

$$\overline{AD}^2 . \, CB - \overline{CD}^2 . \, AB + \overline{BD}^2 . \, AC = AB \, . \, AC \, . \, CB,$$

oder $\quad AB \, . \, \overline{CD}^2 + BC \, . \, \overline{AD}^2 + CA \, . \, \overline{BD}^2 = - AB \, . \, BC \, . \, CA.$

Wenn man hierbei die CD als Halbirungslinie des Winkels

$ABCD$, $BCAD$, $CABD$,

oder $ABDC$, $BCDA$, $CADB$ u. s. w.,

setzt zwischen die beiden mittleren Buchstaben das Multiplicationszeichen u. s. w. Dieser Ausdruck kann übrigens als der besondere einer viel allgemeineren Relation zwischen Systemen von Punkten in Einer Graden dargestellt werden.

ADB oder des Nebenwinkels davon annimmt, oder wenn *C* der Halbirungspunkt des Abschnittes *AB* ist, wenn ferner ausserdem für diese besondern Fälle noch $AD = BD$ u. s. w. vorausgesetzt wird; so ergeben sich aus vorstehender Gleichung mehrere bekannte Sätze der Elementargeometrie.

Aus der Gleichung V. lässt sich noch eine zweite bemerkenswerthe Relation bezüglich vier beliebiger Punkte *A*, *B*, *C*, *D* einer Graden ableiten. Nach V. hat man nämlich

$$AB \,.\, \overline{CD}^2 + BC \,.\, \overline{AD}^2 + CA \,.\, \overline{BD}^2 + AB \,.\, BC \,.\, CA = 0,$$
$$BC \,.\, \overline{DA}^2 + CD \,.\, \overline{BA}^2 + DB \,.\, \overline{CA}^2 + BC \,.\, CD \,.\, DB = 0,$$
$$CD \,.\, \overline{AB}^2 + DA \,.\, \overline{CB}^2 + AC \,.\, \overline{DB}^2 + CD \,.\, DA \,.\, AC = 0,$$
$$DA \,.\, \overline{BC}^2 + AB \,.\, \overline{DC}^2 + BD \,.\, \overline{AC}^2 + DA \,.\, AB \,.\, BD = 0.$$

Addirt man die erste und dritte und subtrahirt davon die zweite und vierte, so ergiebt sich

VI. $$AB.BC.CA - BC.CD.DB + CD.DA.AC - DA.AB.BD = 0,$$

oder

$$AB \,.\, BC \,.\, CA = DA \,.\, AB \,.\, BD + DB \,.\, BC \,.\, CD + DC \,.\, CA \,.\, AD.$$

Man vergleiche hiermit §. 23 II.

---

§. 9.

Sind durch *AA'*, *BB'* oder kürzer durch *a* und *b* die positiven Richtungen zweier Graden in ein und derselben Ebene bezeichnet, so soll unter $AA'^{\wedge}BB'$ oder kürzer $a^{\wedge}b$ der Winkel oder der Richtungsunterschied derselben, d. h. diejenige Grösse der Drehung verstanden werden, welche die im Ausdruck zuerst genannte Grade *AA'* oder *a* um den gemeinsamen Durchschnittspunkt beider in einem gewissen (positiven) Sinne, z. B. von der Rechten nach der Linken machen müsste, wenn ihre positive Richtung mit der positiven Richtung der andern Geraden *BB'* oder *b* zusammenfallen sollte.

§. 10.

1) Fallen die positiven Richtungen beider Graden in eine Grade zusammen, so kann man sich vorstellen, dass die eine Grade noch

gar nicht gedreht worden ist, oder eine, zwei ... n volle Umdrehungen von 360^0 in irgend einem Sinne gemacht hat, d. h. der Winkel beider Graden ist $= 0$, oder $= n . 360^0$, oder nach einer andern bekannten Bezeichnungsweise $= 0$, $= n\pi$, wobei n jede ganze positive oder negative Zahl einschliesslich der 0 bedeutet. Man hat somit $AA'^{\wedge}AA' = 0 = 2n\pi$. Hieraus geht hervor, dass in der gegenseitigen Richtung zweier Graden nichts verändert wird, wenn man dem Winkel derselben eine Anzahl voller Umdrehungen in irgend einem Sinne oder $\pm n . 360^0$ hinzufügt. Eine oder mehrere volle Umdrehungen sollen daher auch, insofern deren Hinzufügung in der gegenseitigen Richtung der Graden nichts verändert, gleich 0 gerechnet werden.

2) Liegen die beiden Graden mit ihren entgegengesetzten Richtungen aufeinander, so ist der von ihnen gebildete Winkel $= 180^0$; d. h. es ist $AA'^{\wedge}A'A = 180^0$ $(= \pi)$.

3) Sind zwei Grade einander parallel, so sind ihre positiven Richtungen entweder gleich oder entgegengesetzt, d. h. wird die eine Grade sich selbst parallel verschoben, bis sie mit der andern zusammenfällt, so kommen entweder gleiche oder entgegengesetzte Richtungen aufeinander zu liegen; im erstern Falle ist der Winkel, den sie bilden, $= 0$, im andern $= 180^0$.

Bemerkung. So wie man Strecken oder Abschnitte in einer und derselben Graden rücksichtlich ihrer Richtungen mit einander vergleicht und ihnen eine gemeinsame Richtung zuweist, auch wenn sie nicht einen und denselben Anfangspunkt haben, ebenso kann man die Winkel in einer und derselben Ebene, auch wenn sie nicht einen und denselben Scheitel haben, nach einer gemeinsamen Drehungsrichtung bemessen oder nach einem und demselben Sinne rechnen. Auf diese Weise lässt sich das Princip in der Bezeichnung entgegengesetzter Grössen auch auf Winkel als auf Drehungsgrössen und zwar*) in einer viel weitern Ausdehnung als in der Regel zeither geschehen ist, anwenden, und in der Folge soll diess auch stets beobachtet werden.

§. 11.

Bezeichnet $a^{\wedge}b$ nach dem Vorhergehenden den Winkel, um welchen die Grade a in der Richtung von rechts nach links gedreht

*) Nach dem Vorgange von Herrn Möbius.

werden muss, wenn ihre positive Richtung mit derjenigen von b zusammenfallen soll, so bedeutet $b^\wedge a$ entweder den Winkel, um welchen die Grade b in demselben Sinne von rechts nach links gedreht werden muss, wenn ihre positive Richtung mit der von a zusammenfallen soll, d. h. den Ergänzungswinkel zu 360° von $a^\wedge b$, oder den Winkel, um welchen b in entgegengesetzem Sinne von links nach rechts gedreht werden muss, wenn ihre positive Richtung mit der von a zusammenfallen soll, d. h. den negativen Winkel von $a^\wedge b$. Im erstern Falle hat man

$$b^\wedge a = 360^0 - a^\wedge b$$

im andern dagegen

$$b^\wedge a = - a^\wedge b.$$

Da aber eine volle Umdrehung von 360° gleich 0 zu rechnen ist, so hat man in jedem Falle

I. $$a^\wedge b + b^\wedge a = 0 \text{ und } a^\wedge b = - b^\wedge a.$$

§. 12.

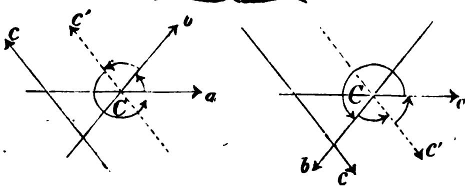
Liegen drei Grade a, b, c in einer Ebene, so hat man für jede Lage derselben

II. $$\begin{cases} a^\wedge b + b^\wedge c + c^\wedge a = 0, & a^\wedge b + b^\wedge c = a^\wedge c \\ a^\wedge b - a^\wedge c = c^\wedge b, & a^\wedge b - c^\wedge b = a^\wedge c \end{cases}$$

wobei alle Winkel in einerlei Drehungssinne genommen werden.

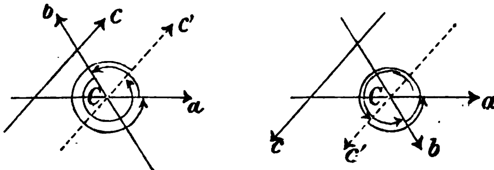
Im Allgemeinen schneiden sich die drei Graden in drei Punkten, und bilden daselbst zu je zweien die betreffenden Winkel. Legt man durch den Durchschnitt zweier Geraden z. B. von a und b, welcher C heisse, eine mit der dritten c gleichgerichtete Grade c', so bildet letztere dieselben Winkel mit a und b wie die Gerade c und man kann statt der Winkel $a^\wedge b$, $b^\wedge c$, $c^\wedge a$ die Winkel $a^\wedge b$, $b^\wedge c'$, $c'^\wedge a$ in Betracht ziehen. Nun kann die positive Richtung von c' gegen den von a und b gebildeten Winkel nur zweierlei Lagen haben, nämlich entweder ausserhalb des Winkels $a^\wedge b$, hinter b und vor a (Fig. 2 a. u. 2 b.), oder innerhalb $a^\wedge b$, d. h. zwischen a und b (Figur 3 a. u. 3 b.) liegen.

Fig. 2 a. u. 2 b.



1) Liegt c' ausserhalb des Winkels $a^\wedge b$, so hat man die Graden a, b, c' hinter einander in der von rechts nach links gehenden Drehungsrichtung innerhalb einer vollen Umdrehung, und es ergiebt sich unmittelbar

Fig. 3 a. u. 3 b.



$$a^\wedge b + b^\wedge c' + c'^\wedge a = 360^0 = 0.$$

2) Liegt c' zwischen a und b, so geht man von a nach b und c' in einerlei Sinn von rechts nach links zweimal im Umkreise herum, oder man hat

$$a^\wedge b + b^\wedge c' + c'^\wedge a = 2 . 360^0 = 0.$$

Da nun $c^\wedge c' = 0$, also $c'^\wedge a = c^\wedge a$ und $b^\wedge c' = b^\wedge c$ ist, so ergiebt sich für alle Fälle

$$a^\wedge b + c^\wedge b + a^\wedge c = 0$$

und hieraus, weil $c^\wedge b = -b^\wedge c$, $c^\wedge a = -a^\wedge c$ ist,

$$a^\wedge b + b^\wedge c = a^\wedge c,$$

$$a^\wedge b - a^\wedge c = c^\wedge b, \quad a^\wedge b - c^\wedge b = a^\wedge c.$$

§. 13.

Zusätze. 1) Ist die Richtung einer Graden a durch den Winkel, welchen sie mit einer als Anfangsrichtung dienenden Graden q bildet, gegeben und man will dieselbe auf eine andere Grade q' als Richtungslinie beziehen, so hat man hierzu

1) $$q^\wedge a = q'^\wedge a - q'^\wedge q,$$

wie auch die gegenseitige Richtung der Graden q, q', a in der Ebene sein möge.

2) Der (Richtungsunterschied) Winkel $a^\wedge b$ lässt sich in gleicher Weisse durch die (Richtungsunterschiede) Winkel, welche seine Schenkel mit einer gemeinsamen Richtungslinie q bilden, ausdrücken. Man hat dafür

2) $$a^\wedge b = q^\wedge b - q^\wedge a.$$

3) Vertauscht man in dem Ausdrucke $AA'^\wedge BB'$ eines Winkels eine der beiden Strecken AA' mit ihrer entgegengesetzten $A'A$, so giebt man dem Winkel einen Zuwachs von 180^0, oder es ist

$$A'A^\wedge BB' = AA'^\wedge BB' + 180^0$$

ebenso $$AA'^\wedge B'B = AA'^\wedge BB' + 180^0.$$

Man hat nämlich

$$A'A^\wedge BB' = A'A^\wedge AA' + AA'^\wedge BB',$$

aber $$A'A^\wedge AA' = 180^\circ,$$

folglich u. s. w.

4) Vertauscht man in $AA'^\wedge BB'$ beide Strecken mit ihren entgegengesetzten, so giebt man dem Winkel einen Zuwachs von $360^\circ = 0$, d. h. es ist $AA'^\wedge BB' = A'A^\wedge B'B$. (Folgt unmittelbar aus 3.)

§. 14.

Sind in einer Ebene beliebig viel Grade $a, b, c, \ldots m, n$ in irgend einer Aufeinanderfolge gegeben, so ist stets

III. $$a^\wedge b + b^\wedge c + \ldots + m^\wedge n + n^\wedge a = 0.$$

Wird der Satz für μ Grade als richtig angenommen, ist also

$$a^\wedge b + b^\wedge c + \ldots + l^\wedge m + m^\wedge a = 0$$

und nimmt man noch eine Grade n hinzu, für welche

$$a^\wedge m + m^\wedge n + n^\wedge a = 0$$

ist, so geben beide Gleichungen vereinigt

$$a^\wedge b + b^\wedge c + \ldots + l^\wedge m + m^\wedge a + a^\wedge m + m^\wedge n + n^\wedge a = 0,$$

oder kürzer, weil $m^\wedge a + a^\wedge m = 0$

$$a^\wedge b + b^\wedge c + \ldots + l^\wedge m + m^\wedge n + n^\wedge a = 0;$$

d. h. gilt der Satz für μ Grade, so ist er auch richtig für $\mu + 1$ Grade. Nun ist er für drei Grade erwiesen, folglich etc.

§. 15.

Sind die beiden Graden a und a' durch die Winkel, welche sie mit der gemeinsamen Richtungslinie q bilden, ihrer Richtung nach in der Ebene bestimmt, ist ferner m eine Grade, welche den Winkel $a^\wedge b$ halbirt, so ist

3) $$\frac{q^\wedge a + q^\wedge a'}{2} = q^\wedge m$$

und

4) $$\begin{cases} \sin q^\wedge a \sin q^\wedge a' = \sin^2 q^\wedge m - \sin^2 m^\wedge a \\ \qquad = \sin^2 q^\wedge m - \sin^2 m^\wedge a'. \end{cases}$$

Wie in §. 5 hat man

$$q^\wedge a = q^\wedge m + m^\wedge a, \quad q^\wedge a' = qm + m^\wedge a'$$

folglich, weil $m^\wedge a + m^\wedge a' = 0$

$$q^\wedge a + q^\wedge a' = 2qm.$$

Wendet man ferner auf die Gleichungen

$$\sin q^\wedge a' = \sin (q^\wedge m + m^\wedge a)$$
$$\sin q^\wedge a' = \sin (q^\wedge m + m^\wedge a') = \sin (q^\wedge m - m^\wedge a)$$

die Formel $\sin (x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$ an und multiplicirt sie, so erhält man die Relation 4).

§. 16.

Sind a, a', b, b' Grade einer Ebene, m und n die Halbirungslinien der Winkel $a^\wedge a'$, $b^\wedge b'$, so ist

5) $$\frac{a^\wedge b + a'^\wedge b'}{2} = \frac{a'^\wedge b + a^\wedge b'}{2} = m^\wedge n.$$

Denn bezieht man die Richtungen der Graden auf eine gemeinsame Richtungslinie q, so hat man

$$q^\wedge m = \frac{q^\wedge a + q^\wedge a'}{2}, \quad q^\wedge n = \frac{q^\wedge b + q^\wedge b'}{2},$$
$$q^\wedge n - q^\wedge m = \frac{q^\wedge b + q^\wedge b' - q^\wedge a - q^\wedge a'}{2}$$

oder weil $q^\wedge n - q^\wedge m = m^\wedge n$, $q^\wedge b - q^\wedge a = a^\wedge b$ etc. ist,

$$m^\wedge n = \frac{a^\wedge b + a'^\wedge b'}{2} = \frac{a'^\wedge b + a^\wedge b'}{2}.$$

§. 17.

Sind a, b, c, d vier beliebige Grade einer Ebene, so ist immer

$$\sin a^\wedge b \sin c^\wedge d + \sin b^\wedge c \sin a^\wedge d + \sin c^\wedge a \sin b^\wedge d = 0.$$

Wie in §. 7 ergiebt sich dieser Satz, wenn man die drei Gleichungen

$$\sin a^\wedge b = \sin (a^\wedge d + d^\wedge b)$$
$$\sin b^\wedge c = \sin (b^\wedge d + d^\wedge c)$$
$$\sin c^\wedge a = \sin (c^\wedge d + d^\wedge a)$$

der Reihe nach mit $\sin c^\wedge d$, $\sin a^\wedge d$, $\sin b^\wedge d$ multiplicirt und die Producte rechts nach der Formel $\sin (x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ entwickelt und berücksichtigt, dass $\sin x = -\sin (-x)$ ist.

Bemerkung. Man wird erkannt haben, dass die Sätze in §. 11—17 den in §. 1—6 ganz analog sind. So lange in den Ausdrücken nur Additionen und Subtractionen, sowie Multiplicationen und Divisionen durch reine Zahlen vorkommen, hat man in §. 11—17 ein und dieselbe Ebene für dieselbe Grade, denselben Drehungssinn für dieselbe Richtung festzuhalten, sowie Grade für Punkt, Winkel für Abschnitt oder Strecke zu setzen. Die Ausdrücke dagegen, welche Producte von Abschnitten enthalten, lassen sich unter Bedingungen, welche in einem Satze des nächsten Capitels enthalten sind, nur auf Funktionen (Sinusse) von Winkeln entsprechend übertragen.

§. 18.

Das Princip der Zeichen lässt sich auch auf die gewöhnliche Bezeichnung der Winkel, unter Voraussetzung einer Beachtung der Buchstabenstellung übertragen. Der Winkel $CA^{\wedge}CB$, nach der in dem Vorhergehenden entwickelten Bedeutung aufgefasst, kann, indem man die Benennung des zuerst gesetzten Schenkels in AC umsetzt und den mittleren Scheitelbuchstaben C nur einmal schreibt, mit derselben Bestimmtheit und Unzweideutigkeit auch kurz durch

$$ACB$$

bezeichnet und dieser Ausdruck wieder rückwärts in $CA^{\wedge}CB$ aufgelöst werden. Hiernach ist $FG^{\wedge}FH = GFH$ und $FGH = GF^{\wedge}GH$ u. s. w.

Da nach Vorhergehendem $CB^{\wedge}CA = -CA^{\wedge}CB$ oder $= 360^{0} - CA^{\wedge}CB$ ist (§. 10. I.), und $CB^{\wedge}CA$ nach der eben erklärten Bezeichnungsweise durch BCA auszudrücken ist, so hat man allgemein

$$BCA + ACB = 0,$$
$$BCA = -ACB = 360^{0} - ACB.$$

Die Ergänzungswinkel zu 180^{0} von ACB erhalten ihre Bezeichnung in Folge der §. 13. 3) gegebenen Sätze. Man hat nämlich

$$BC^{\wedge}CA = BC^{\wedge}CB + CB^{\wedge}CA \text{ (§. 12)}$$
$$BC^{\wedge}CB = 180^{0} \text{ (§. 12. 3)},$$

mithin $$BC^{\wedge}CA = 180^{0} + BCA = 180^{0} - ACB.\text{*)}$$

---

*) Dieser Bezeichnung der Winkel analog lässt sich auch eine ähnliche für Strecken oder Abschnitte von Graden, insofern dieselben durch deren gegenseitigen Durchschnitt begrenzt werden, zur Seite stellen. Seien a, b, c drei beliebige Grade in einer Ebene C, A, B die Durchschnitte von a und b, b und c, c und a, welche auch resp. durch

$$a^{\cdot}b,\ b^{\cdot}c,\ c^{\cdot}a \text{ oder } b^{\cdot}a,\ c^{\cdot}b,\ a^{\cdot}c$$

angedeutet werden können. Der Abschnitt CA, d. h. der zwischen a und c liegende Abschnitt von b, lässt sich eben so bestimmt nach Grösse und Richtung durch $a \cdot b - b \cdot c$ oder, wenn man den mittleren Buchstaben nur einmal setzt, kurz durch

$$\overline{abc}, \text{ auch schlechthin } abc$$

bezeichnen; desgleichen ist

$$AB = bca,\ BC = cab$$

zu setzen, Ferner, weil

§. 19.

Die Sätze in §. 12 und 14 lassen sich nach dieser Bezeichnungsweise der Winkel in folgender Gestalt wiedergeben.

Sind A, B, C, D vier beliebige Punkte einer Ebene, so ist

$$ABC + CBD = ABD,$$

welches auch der Sinn ist, in welchem alle Winkel gerechnet werden. Führt man die Bezeichnung der Winkel auf die frühere zurück,

$$BA^\wedge BC + BC^\wedge BD = BA^\wedge BD,$$

so ist der Satz nach §. 12 unmittelbar einleuchtend.

Seine Erweiterung auf beliebig viele Punkte A, B, C, D ... .. L, M, O der Ebene in der Form

$$AOB + BOC + COD + \ldots + LOM = AOM$$

lässt sich sowohl auf demselben Wege wie durch den Schluss von n auf $n+1$ leicht darthun.

§. 20.

1) Sind A, B, C drei beliebige Punkte, so ist

$$ABC + BCA + CAB = 180^0$$

folglich $$2ABC + 2BCA + 2CAB = 0 \text{ (§. 10. 1)}$$

$$AB = -BA,$$

$$AB = bca,\quad BA = c\cdot a - c\cdot b = a\cdot c - c\cdot b = acb,$$

so ist auch $$bca = -acb.$$

Diese Bezeichnungsweise kann von Nutzen werden bei Vergleichung und Nebeneinanderstellung entsprechender Sätze über Drei-, Vier-, Viel-Ecke und Drei-, Vier-, Viel-Seite.

Es liegen nämlich in dem

durch drei Punkte A, B, C bestimmten Dreiecke ABC den Seiten

AB, BC, CA

gegenüber die Winkel

ACB, BAC, CBA

oder bei entgegengesetztem Drehungssinne

BCA, CAB, ABC.

Denn von der Richtung der Seiten bleibt immer noch die Entscheidung über den positiven Drehungssinn der Winkel unabhängig.

durch die Grade a, b, c bestimmten Dreiseit abc den Winkeln

$a^\wedge b$, $b^\wedge c$, $c^\wedge a$

gegenüber die Seiten

acb, bac, cba

oder bei entgegengesetzter Richtung der Seiten

bca, cab, abc.

Denn von dem Drehungssinn der Winkel bleibt die Entscheidung über die positive Richtung der Seiten noch unabhängig.

für jeden Drehungssinn der Winkel. Denn der linke Theil der ersten Gleichung ist gleichbedeutend mit

$$BA^\wedge BC + CB^\wedge CA + AC^\wedge AB$$
$$= BA^\wedge BC + BC^\wedge AC + AC^\wedge AB \text{ (§. 13. 4)}$$
$$= BA^\wedge AC + AC^\wedge AB = BA^\wedge AB = 180^\circ \text{ (§. 10. 2)}.$$

2) Der Satz lässt sich auch auf eine beliebige Anzahl μ Punkte einer Ebene $A, B, C, D \ldots L, M$ erweitern; man hat dafür allgemein

$$2\,(ABC + BCD + CDE + \ldots + LMA + MAB) = 0.$$

Nimmt man nämlich diese Beziehung für μ Punkte als richtig an und fügt denselben noch einen N hinzu, so ist für diesen

$$2\,(AMN + MNA + NAM) = 0.$$

Addirt man beide Gleichungen und bemerkt, dass

$$LMA + AMN = LMN,\quad NAM + MAB = NAB,$$

so erhält man

$$2\,(ABC + BCD + \ldots + LMN + MNA + NAB) = 0.$$

Ist somit die Gleichung für μ Punkte giltig, so ist sie es auch für $\mu + 1$ Punkte; direct erwiesen ist sie für 3 Punkte, folglich u. s. w.

§. 21.

Als Beispiele für Anwendung der in §. 18 aufgestellten Bezeichnungsweise mag noch folgende Einkleidung zweier bekannter Sätze dienen, von welcher später auch weiterer Gebrauch gemacht werden wird. (S. Moebius: über Involution von Punkten in einer Ebene — Berichte d. K. Gesellsch. d. Wissensch. z. Leipzig, 1853. S. 180.)

1) Sind A, B, C drei Punkte einer Graden, D ein vierter ausserhalb derselben, so ist der Winkelunterschied $AD^\wedge AB - AD^\wedge AC = 0$ oder $= 180^\circ$, je nachdem B und C auf einerlei oder verschiedenen Seiten von A aus liegen. Jedenfalls ist aber

$$2\,AD^\wedge AB = 2\,AD^\wedge AC$$

oder

$$2\,DAB = 2\,DAC;$$

sowie umgekehrt aus dieser Gleichung folgt, dass A, B, C in nicht zu bestimmender Reihenfolge in einer Graden liegen.*)

---

*) Sind a, b, c drei Grade einer Ebene, C, A, B die Durchschnittspunkte resp. $a{\cdot}b$, $b{\cdot}c$, $c{\cdot}a$, ferner d eine vierte Grade der Ebene, welche a, b, c in den Punkten $A' = a{\cdot}d$, $B' = b{\cdot}d$, $C' = c{\cdot}d$ trifft; so drückt die Gleichung

Sind A, B, C, D vier Punkte einer Kreisperipherie, so ist, je nachdem C und D auf einerlei oder verschiedenen Seiten der Sehne AB liegen, der Winkelunterschied $CA^\wedge CB - DA^\wedge DB = 0$ oder $= 180^0$ mithin jedenfalls

$$2\,CA^\wedge CB = 2\,DA^\wedge DB,$$

oder

$$2\,ACB = 2\,ADB,$$

sowie umgekehrt aus dieser Gleichung die Kreislage der vier Punkte A, B, C, D folgt.*)

Aus der Kreislage derselben Punkte folgt auch

$$2\,(ABC - BCD) = 2\,(ADC - BAD),$$
$$2\,(ACD - CDB) = 2\,(ABD - CAB),$$
$$2\,(ADB - DBC) = 2\,(ACB - DAC),$$

doch folgt aus diesen Gleichungen nicht unbedingt die Kreislage.

$$a^\cdot d - a^\cdot b = a^\cdot d - a^\cdot c \quad (A'C = A'B)$$

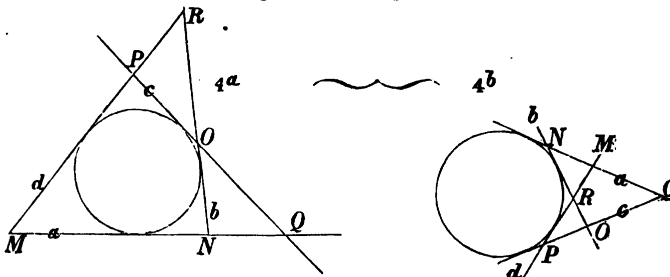
oder

$$dab = dac$$

aus, dass die drei Graden a, b, c einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt haben.

**) Sind a, b, c, d vier einen Kreis berührende Grade, so sind die $\left\{\begin{matrix}\text{Summen Fig. 4. a.}\\ \text{Unterschiede Fig. 4. b.}\end{matrix}\right\}$ von je zwei gegenüberliegenden Abschnitten, welche auf zwei Graden durch die Durchschnittspunkte mit den jedesmaligen zwei andern Graden begrenzt werden, einander gleich, wobei die Berührungspunkte der Graden, zu denen die gegenüberliegenden Abschnitte gehören, auf $\left\{\begin{matrix}\text{verschiedener}\\ \text{einerlei}\end{matrix}\right\}$ Seite der Sehne liegen, welche die beiden andern Berührungspunkte verbindet. D. h. es ist Fig. 4. a. u. 4. b.

Fig. 4 a. und Fig. 4 b.



$$MN \pm OP = PM \pm NO,$$

folglich jedenfalls

$$(NO - OP)^2 = (PM - MN)^2,$$

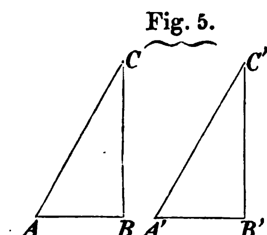
(Auch ein Viereck, dessen gegenüberliegende Winkel einem Rechten gleich sind, also zwei rechtwinklich sich schneidenden Kreisen eingeschrieben ist, giebt vorstehende Beziehungen.)

---

§. 22.

Den Umfang eines Dreiecks *ABC* kann ein darin sich bewegender Punkt in zweierlei Sinn durchlaufen. Stellt man sich innerhalb der Fläche des Dreiecks auf und verfolgt mit dem Auge den im Umfange herumlaufenden Punkt, so erscheint dessen Bewegung entweder von der Rechten nach der Linken oder in entgegengesetztem Sinne. Durch die Aufeinanderfolgen *ABC* oder *CBA* der Buchstaben, womit das Dreieck bezeichnet wird, lässt sich der eine oder andere Sinn der Bewegung dieses Punktes ausdrücken. Nimmt man nun auch den Werth der Dreiecksfläche als positiv oder negativ an, je nachdem die Bewegung des Punktes in dem einen oder andern Sinne zu denken ist, so folgt zunächst, dass durch *ABC*, *BCA*, *CAB* die Dreiecksfläche in einem und demselben z. B. positiven Sinne, in dem entgegengesetzten, negativen aber durch *ACB*, *CBA*, *BAC* bezeichnet wird.

Fig. 5.



Der gleiche oder entgegengesetze Sinn, in welchem Dreiecksflächen aufzufassen sind, lässt sich auch in folgender Weise erörtern.

Seien von den Dreiecken *ABC*, *A'B'C'* die entsprechenden Seiten *AB* und *A'B'*, *BC* und *B'C'*, *CA* und *C'A'* entweder gleich oder in gleichem Verhältniss, so können

---

oder, wenn man die Punkte *M*, *N*... durch $d{\cdot}a$, $a{\cdot}b$..., die Abschnitte *MN*, *NO*... durch *dab*, *abc*... ausdrückt:

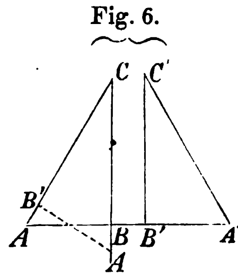
$$(abc - bcd)^2 = (cda - dab)^2.\quad \text{Ebenso ist}$$
$$(acd - cdb)^2 = (dba - bac)^2,$$
$$(adb - dbc)^2 = (bca - cad)^2,$$

d. h. **Die Differenzen zweier anliegenden Abschnitte** (die jedesmaligen vier Abschnitte in einem Zuge *MNOPM*, *MQORM*, *NQPRN* durchlaufen) **der berührenden Graden sind absolut genommen einander gleich.** Umgekehrt folgt aus diesen gleichen Differenzen die Kreislage der vier Graden.

hinsichtlich der Lage dieser Dreieke folgende zwei Fälle gedacht werden.

Verschiebt man das eine Dreieck $A'B'C'$ in der beiden gemeinschaftlichen Ebene so, dass zwei entsprechende (gleiche) Winkel C und C' mit ihren Spitzen und Schenkeln aufeinander liegen, so fallen entweder auch die entsprechenden Schenkel derselben CA und $C'A'$, CB und $C'B'$ aufeinander und die entsprechenden dritten Seiten AB und $A'B'$ haben gleiche Richtung (Fig. 5), oder es liegen die nicht entsprechenden Seiten CA und $C'B'$, CB und $C'A'$ auf einander und die dritten Seiten AB und $A'B'$ haben ungleiche Richtung (Fig. 6). Im ersteren Falle nennt man die Lage der Dreiecke eine **einstimmige**, im andern eine **entgegengesetzte** oder **symmetrische** und bezeichnet oder unterscheidet in solcher Weise oft die Dreiecke selbst. Die gleiche Aufeinanderfolge ABC, $A'B'C'$ der Buchstaben entsprechender Ecken giebt bei einstimmigen Dreiecken **gleichen** Bewegungssinn des den Umfang jeden Dreiecks durchlaufenden Punktes zu erkennen. Bei symmetrischen Dreiecken ist aber der Sinn dieser Bewegungen entgegengesetzt. Hiernach sind die Werthe einstimmiger Dreiecksflächen mit einerlei Vorzeichen, die von symmetrischen Dreieken mit entgegengesetzten Vorzeichen zu belegen.

Fig. 6.



Um symmetrische Dreiecke (Fig. 6) in einstimmige Lage zu bringen, muss man das eine derselben um eine seiner Seiten oder um irgend eine andere Grade der gemeinschaftlichen Ebene als um eine Achse eine halbe Umdrehung machen lassen, bis es wieder in die Ebene fällt. Dann ist die Aufeinanderfolge der entsprechenden Ecken in beiden Dreiecken nach einerlei Sinn und ein weiteres Aufeinanderlegen derselben in der oben angegebenen Weise lässt sich nun durch Verschieben des einen Dreiecks in der gemeinschaftlichen Ebene beider bewerkstelligen.

Offenbar bezieht sich dieselbe Einstimmigkeit und derselbe Gegensatz von Flächen und Flächeninhalten nicht blos auf ähnliche und ähnlichgleiche Dreiecke, sondern überhaupt auf zwei beliebige Dreiecke, wenn die drei Eckpunkte des einen den drei Eckpunkten nur irgend wie entsprechen.

Bezeichnet man die entsprechenden Winkel zweier Dreiecke

durch dieselbe Aufeinanderfolge der Buchstaben entsprechender Ecken, so sind bei einstimmigen Dreiecken alle Winkel entweder hohl oder alle erhaben, je nach dem Drehungssinne, in welchem man die Winkel beider Dreiecke rechnet. Nimmt man dagegen für die Winkel symmetrischer Dreiecke einerlei Drehungssinn an, so sind die Winkel des einen Dreiecks hohl, die des andern erhaben, wenn die entsprechenden Winkel in derselben Weise bezeichnet werden.

§. 23.

Folgerungen. 1) Sind A, B, C drei Punkte einer Graden und D ein vierter ausserhalb derselben, so ist, weil

$$AB + BC + CA = 0$$

auch mit Vorsetzung von D die Summe der Dreiecke

$$\text{I.} \quad \begin{cases} DAB + DBC + DCA = 0, \\ \text{oder } DAB + DBC = DAC; \end{cases}$$

auch verhält sich

$$DAB : DBC : DCA = AB : BC : CA.$$

2) Man nehme vier beliebige Punkte A, B, C, D in einer Ebene an, von denen aber keine drei in einer Grade liegen, und verbinde sie zu je zweien durch Grade. Der Durchschnittspunkt der beiden Graden AB und CD sei Z.*) Da C, D, Z in einer Graden liegen, hat man nach dem vorhergehenden Satze

$$ACD + ADZ + AZC = 0$$
$$BCD + BDZ + BZC = 0,$$

desgleichen, weil A, B, Z in einer Graden enthalten sind,

$$CAB + CBZ + CZA = 0$$
$$DAB + DBZ + DZA = 0.$$

Zieht man von der Summe der ersten und dritten Gleichung die der zweiten und vierten ab, so heben sich alle mit Z behafteten Glieder, und man erhält

$$ACD - BCD + CAB - DAB = 0,$$

*) Immer nämlich wird wenigstens eine durch A und einen der drei andern Punkte B, C, D gelegte Grade die durch die beiden übrigen Punkte gezogene Grade schneiden. Diese sei hier AB. Sind A, B, C, D die Ecken eines Parallelogramms, so sind A und B, C und D als die gegenüberstehenden Ecken desselben zu nehmen und Z ist der Durchschnittspunkt der Diagonalen.

wofür man auch symmetrischer schreiben kann

$$ABC - BCD + CDA - DAB = 0,$$

oder

II. $$ABC = DAB + DBC + DCA,$$

d. h. Wählt man in der Ebene eines Dreiecks (ABC) einen Punkt (D), so ist die Flächensumme der Dreiecke (DAB, DBC, DCA), welche diesen Punkt zur gemeinschaftlichen Spitze und die drei Seiten des Dreiecks in geschlossener Aufeinanderfolge (AB, BC, CA) zu Grundlinien haben, gleich dem Flächeninhalte des ursprünglichen Dreiecks (ABC) in demjenigen Sinne genommen, welchen dieselbe Aufeinanderfolge der drei Seiten (nach §. 22) angiebt. Dieser Satz lässt sich folgendergestalt erweitern.

§. 24.

Sind μ beliebige Punkte A, B, C, ... L, M einer Ebene in irgend einem geschlossenen Zuge $ABC \ldots LMA$ durch grade Linien (zu einem einfachen μ Eck) mit einander verbunden und wählt man in der Ebene noch einen beliebigen Punkt P, den man mit den vorhergehenden durch Grade verbindet, so ist die Flächensumme der Dreiecke

III. $$PAB + PBC + PCD + \ldots + PLM + PMA = S$$

constant und unabhängig von der Lage des Punktes P.

Beweis. Man nehme den Satz für μ Punkte als richtig an, füge zu denselben noch einen Punkt N hinzu und setze die Summe der Dreiecke

$$PAB + PBC + \ldots + PLM + PMN + PNA = S'.$$

Lässt sich nun beweisen, dass auch S' von P unabhängig und nur von der Lage der Punkte A, $B \ldots M$, N abhängig bleibt, so ist der Satz nach der bekannten Schlussweise allgemein bewiesen. Es ist aber nach dem Satze der vorhergehenden Nummer

$$PMN + PNA + PAM = MNA;$$

durch Addition derselben zur angenommenen Gleichung III. und mit Berücksichtigung, dass $PAM + PMA = 0$ ist, erhält man

$$PAB + PBC + \ldots + PLM + PMN + PNA = S + MNA,$$

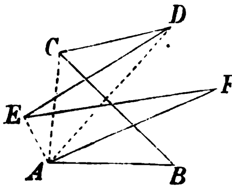
folglich $$S' = S + MNA,$$

d. h. ist die Flächensumme S von der Lage des Punktes P unabhängig, so ist dasselbe auch der Fall mit S', folglich u. s. w.

Die constante Summe S ist offenbar der Flächeninhalt des Vielecks $ABC \ldots MA$, wenn dasselbe ein gewöhnliches ohne Doppelpunkte oder überhaupt ein solches ist, durch dessen Umfang eine beliebige Grade in nur zwei Punkten geschnitten wird, und wenn, wie gewöhnlich, der Punkt P innerhalb desselben oder in einen seiner Eckpunkte gelegt wird. Aus dem oben erwiesenen Satze geht nun hervor, dass diese Fläche auch durch die Summe der Dreiecke dargestellt wird, welche zur gemeinschaftlichen Spitze einen ausserhalb der eingeschlossenen Fläche des Vielecks liegenden Punkt und zu Grundlinien die Seiten des Vielecks haben, wobei indess immer der nach §. 22 zu bestimmende Sinn jeden Dreiecks berücksichtigt werden muss.

Da aber dieselbe Summe der Dreiecke von der Wahl des Punktes P auch unabhängig ist, wenn in dem Umfange des Vielecks $ABC \ldots MA$ Doppel- und mehrfache Punkte vorkommen, wie z. B. in dem Sechseck $ABCDEF$ (Fig. 7), so ist es angemessen und consequent diese Summe der Dreiecke mit Berücksichtigung ihrer Vorzeichen als den Flächeninhalt auch dieser Art von Vielecken festzustellen. Legt man den Punkt P nach A, so ist demnach der Flächeninhalt des Sechsecks $ABCDEA$ gleich der Summe der Dreiecke

Fig. 7.



$$ABC + ACD + ADE + AEF,$$

von denen das erste und dritte zu einander einstimmig aber entgegengesetzt zu dem zweiten und vierten sind. Derselbe Flächeninhalt kann auch dargestellt werden durch die Summe der Dreiecke

$$BCD + BDE + BEF + BFA,$$

oder durch

$$CDE + CEF + CFA + CAB$$

u. s. w., wobei der Punkt P bezüglich nach B oder C verlegt worden ist.

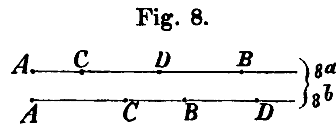
Zweites Capitel.

Von den Doppelverhältnissen.

---

§. 25.

Erklärung. Ist ein Abschnitt AB einer Graden (Fig. 8a. od. 8b.) durch zwei Punkte C und D derselben Graden getheilt, so wird das Verhältniss zwischen den Verhältnissen der Theile, d. h.



$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}$$

ein Doppelverhältniss genannt.

Man spricht sowohl von dem Doppelverhältniss der Abschnitte AC, CB, AD, DB, als auch von dem D.-V. zwischen den Punkten A, B, C, D, insofern diese die genannten Abschnitte begrenzen. Da aber vier Punkte A, B, C, D in einer Graden sechs (absolut genommene) Abschnitte oder Strecken AB, AC, AD, BC, BD, CD bestimmen, in einem Doppelverhältniss aber nur vier derselben vorkommen können, so sind zur Vermeidung von Vieldeutigkeiten noch besondere Bestimmungen nöthig, die in folgender Erklärung enthalten sind.

Unter dem zwischen vier Punkten A, B, C, D einer Graden gebildeten Doppelverhältnisse soll immer das Verhältniss zwischen den Verhältnissen derjenigen Abschnitte AC und CB, AD und DB verstanden werden, in welche die durch die beiden erstgenannten Buchstaben A, B nach **Grösse** und **Richtung** bezeichnete Strecke AB durch die beiden andern zuletzt genannten Punkte

C und *D* getheilt wird, jeden dieser Abschnitte nach Grösse und Richtung so genommen, dass die Summen je zweier, welche die Glieder jedes der beiden Verhältnisse

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}$$

bilden, d. h. die Summen

$$AC + CB, \quad AD + DB,$$

gemäss den §. 1 gegebenen Bestimmungen der getheilten Strecke *AB* gleich sind.

Hiernach ist das Doppelverhältniss (zwischen den) der Punkte *A*, *C*, *B*, *D*

$$\frac{AB}{BC} : \frac{AD}{DC},$$

wobei *AC* als die getheilte Strecke, *B* und *D* als die Theilungspunkte derselben anzusehen sind.

Der Kürze halber soll das zwischen den Punkten *A*, *B*, *C*, *D* gebildete Doppelverhältniss, oder

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} \text{ mit } (ABCD),$$

ebenso $\frac{BD}{DC} : \frac{BA}{AC}$, wo *B* und *C* die Grenzpunkte der getheilten Strecke, *D* und *A* die Schnittpunkte sind, mit (*BCDA*) bezeichnet werden.

Umgekehrt setzt man den symbolischen Ausdruck eines Doppelverhältnisses, wie (*CDBA*) in den gewöhnlichen um, wenn man aus den beiden ersten oder Grenzbuchstaben *CD* der getheilten Strecke die Form $\frac{C}{D} : \frac{C}{D}$ bildet, und das erste Verhältniss durch den dritten Buchstaben *B*, das zweite durch den vierten *A* vervollständigt, wodurch man $\frac{CB}{BD} : \frac{CA}{AD}$ erhält.

Anmerkung. Die vorstehende Erklärung und Bezeichnung der Doppelverhältnisse ist mit der von Herrn Möbius in dessen barycentrischen Calcul zuerst aufgestellten übereinstimmend. Statt Doppelverhältniss wird daselbst noch der den Ursprung dieser zusammengesetzten Verhältnisse näher bezeichnende Name Doppelschnittsverhältniss *(ratio bissectionalis)* gebraucht, doch hat später derselbe berühmte Verfasser sich des abgekürzten Ausdrucks Doppelverhältniss bedient (Theorie der Kreisverwandtschaft, Abhandlungen d. K. S. Gesellschaft d. Wissensch. IV.

S. 546; vergl. Berichte derselben Gesellsch. mathem. phys. Classe 1853, S. 15). Von den mehr oder weniger wesentlich abweichenden Formen nach welchen die Doppelverhältnisse von Anderen gebildet und bezeichnet werden, möge nur die von Herrn Chasles in dessen *Geometrie superieure* und anderwärts angenommene Bezeichnungsweise noch angegeben und mit der von Hrn. Möbius aufgestellten und hier beibehaltenen verglichen werden. Herr Chasles nennt den Ausdruck $\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD}$, gebildet aus vieren der sechs Abschnitte, die durch vier Punkte A, B, C, D einer Graden bestimmt sind, ein anharmonisches Verhältniss der vier Punkte und erklärt es als das Verhältniss der Entfernungen eines Punktes A von zwei andern C und D dividirt durch das Verhältniss der Entfernungen des vierten Punktes B von denselben zwei Punkten C und D. Dabei soll jedem der beiden Verhältnisse das positive oder negative Vorzeichen zukommen, je nachdem die beiden Abschnitte, die das Verhältniss bilden, gleiche oder entgegengesetzte Richtung von ihrem gemeinschaftlichen Anfangspunkte haben. Der positive oder negative Werth des anharmonischen Verhältnisses ergiebt sich dann nach den Regeln der Division aus den Werthen und Vorzeichen der beiden Verhältnisse.*)

Das anharmonische Verhältniss ist somit seinem Werthe und seiner übrigen Bedeutung nach ganz übereinstimmend mit dem Doppelverhältnisse und man hat bei der Vergleichung beider nur zu beachten, dass das anharmonische Verhältniss nach Chasles

$$\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD}$$

mit dem Doppelverhältniss nach Möbius

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = (ABCD)$$

gleichbedeutend ist.

§. 26.

Relative Lage der vier Punkte eines Doppelverhältnisses. 1) Jedes der Verhältnisse, welche ein Doppelverhältniss bilden, kann nach der Lage des Schneidepunktes gegen die beiden Grenzpunkte der geschnittenen Strecke alle möglichen positiven oder negativen Werthe annehmen. Setzt man den Werth des Verhältnisses $AC:CB$ gleich μ, so ist μ eine positive Zahl, wenn der Schneidepunkt C zwischen den Grenzpunkten A und B liegt,

*) Das somit angewendete Princip der Zeichen (§. 1) auf die Abschnitte eines anharmonischen Verhältnisses findet man noch nicht berücksichtigt in dem schätzbaren Werke desselben Verfassers: *Aperçu historique* etc. *Bruxelles* 1837 — übersetzt von Sohnke unter dem Titel: „Geschichte der Geometrie etc. von Chasles. Halle 1839.“

d. h. wenn die Aufeinanderfolge der Punkte ACB ist, oder, wie man auch sagen kann, wenn C ein innerer Punkt der Strecke AB ist. Liegt dabei C in der Mitte zwischen A und B, so ist $\mu = 1$, dagegen ist μ grösser oder kleiner als 1, je nachdem C dem Punkte B oder A näher liegt. Fällt C mit A zusammen, so ist $\mu = 0$, fällt C mit B zusammen, so ist $\mu = \infty$.

Liegt aber C auf der Verlängerung von AB oder BA, oder ist C ein äusserer Punkt der Strecke AB, so hat das Verhältniss $AC : CB = \mu$ einen negativen Werth. Derselbe ist absolut genommen grösser als 1, wenn C auf der Verlängerung von AB hinter B liegt, oder wenn die Aufeinanderfolge der Punkte ABC ist, und es ist dabei μ absolut genommen, um so grösser oder kleiner, je näher oder entfernter C dem Punkte B liegt; rückt C nach dem unendlich entfernten Punkte der Graden, so wird $\mu = -1$. Wenn dagegen μ zwar auch negativ aber absolut kleiner, als 1 ist, so liegt C auf der Verlängerung von BA, oder die Aufeinanderfolge der Punkte ist CAB; dabei hat μ absolut genommen einen um so kleineren oder grösseren Werth, je näher oder entfernter C dem Punkte A ist.

Man kann den Zusammenhang der Werthe und Vorzeichen des Verhältnisses $AC : CB = \mu$ mit der Lage des Punktes C gegen die Grenzpunkte von AB auch in folgender Weise ausdrücken:

μ ist ein $\left\{\begin{matrix}\text{positiver}\\ \text{negativer}\end{matrix}\right\}$ Bruch, wenn C ein $\left\{\begin{matrix}\text{innerer}\\ \text{äusserer}\end{matrix}\right\}$ Punkt von AB ist;

μ ist ein $\left\{\begin{matrix}\text{ächter}\\ \text{unächter}\end{matrix}\right\}$ Bruch, wenn C dem Anfangspunkte A $\left\{\begin{matrix}\text{näher}\\ \text{entfernter}\end{matrix}\right\}$ als dem Endpunkte B liegt.

In den speciellen Fällen, wo C unendlich entfernt liegt, oder mit A oder mit B zusammenfällt, ist μ bezüglich $= -1$, oder 0, oder ∞.

Die vorstehende Diskussion deutet schon darauf hin, dass die beiden rechts und links liegenden unendlich entfernten Punkte einer Graden als ein einziger aufzufassen sind; denn mag man C unendlich entfernt auf der Seite von A oder von B annehmen, in beiden Fällen ist der zugehörige Werth von $\mu = -1$. Dass man eigentlich von nur Einem unendlich fernen Punkte einer Graden sprechen und dessen Lage gleichmässig auf beiden Zweigen, in welche die Grade von irgend einem ihrer Punkte getheilt wird, annehmen kann, wird noch vielfältig aus andern Betrachtungen sich ergeben. Denkt man sich auf einer Kugeloberfläche einen Hauptkreis und in demselben einen Punkt O, sowie dessen Gegenpunkt O', so ist die sphärische Entfer-

nung desselben von O grösser als die irgend eines andern Punktes N desselben Hauptkreises; lässt man nun den Radius der Kugel ohne Grenzen wachsen, so geht der Hauptkreis in eine grade Linie über und der Punkt O' wird gegen O genommen, der unendlich entfernte Punkt der Graden, denn er bleibt immer entfernter von O als irgend ein anderer noch so entfernter Punkt N des in eine Grade übergehenden Hauptkreises. In diesem Merkmale liegt aber die einzige Erklärung oder vielmehr Umschreibung des Begriffs unendlich entfernt.

Setzt man die Verhältnisse $AC : CB = \mu$, $AD : DB = \nu$ und das Doppelverhältniss $(ABCD) = \lambda$, so haben μ und ν gleiche Vorzeichen und λ ist positiv, wenn die Punkte C und D beide entweder innere, oder äussere sind, oder λ ist positiv, wenn die vier Punkte des Doppelverhältnisses die Aufeinanderfolgen

$$ACDB,\quad CABD,\quad DCAB,\quad ABDC,$$
$$ADCB,\quad DABC,\quad CDAB,\quad ABCD$$

haben. In den vier ersten Folgen liegt, wenn man dieselben als cyklische ansieht, der Punkt C dem Anfangspunkte A näher als der Punkt D und man überzeugt sich leicht, dass dabei $AC : CB = \mu$ stets kleiner ist als $AD : DB = \nu$ und dass somit $\frac{\mu}{\nu} = \lambda$ ein ächter Bruch ist. In den vier letzten Folgen — dieselben gleichfalls als cyklische betrachtet — liegt dagegen dem Anfangspunkte A der Punkt D näher als der Punkt C und es ist ebenfalls leicht ersichtlich, dass hierbei $\mu > \nu$, also $\lambda > 1$ ist.

Wenn aber von den Punkten C und D der eine ein innerer, der andere ein äusserer der Strecke AB ist, so haben μ und ν verschiedene Vorzeichen und λ ist negativ. Dieses findet statt bei den Aufeinanderfolgen der Punkte

$$ACBD,\quad DACB,\quad ADBC,\quad CADB.$$

Hierbei ist λ absolut genommen < 1, wenn von den beiden Punkten C und D der innere C näher an A als an B und der äussere D näher an B als an A liegt, dagegen ist $\lambda > 1$, wenn der innere C näher an B als an A und der äussere D näher an A als an B liegt; wird D der innere und C der äussere Punkt, so sind unter übrigens gleichen Umständen die Werthe von λ die umgekehrten. In allen übrigen Fällen, wo der innere und äussere Punkt zugleich

näher an A, oder zugleich näher an B liegen, kann λ absolut kleiner, gleich, oder grösser als 1 werden.*)

Fallen die Schneidepunkte C und D in irgend einem Punkte, welches auch der unendlich entfernte Punkt der Graden sein kann, zusammen, so ist $\lambda = 1$; fällt C mit A, oder D mit B zusammen, so ist $\lambda = 0$; fällt C mit B, oder D mit A zusammen, so ist $\lambda = \infty$. In diesen Fällen hört somit das Doppelverhältniss als solches zu bestehen auf.

Aus den obigen Erörterungen geht zugleich hervor, dass, wenn von vier Punkten einer Graden drei gegeben sind, mit dem Werthe des aus denselben gebildeten Doppelverhältnisses auch der vierte Punkt unzweideutig bestimmt ist.

§. 27.

Beziehungen zwischen den Doppelverhältnissen derselben vier Punkte einer Graden. In dem symbolischen Ausdrucke $(ABCD)$ eines Doppelverhältnisses, dessen Werth $= \lambda$ sei, können die vier Buchstaben auf 24 verschiedene Weisen versetzt werden; diesen 24 Permutationen entsprechen im Allgemeinen verschiedene Werthe der dadurch angedeuteten Doppelverhältnisse, insofern nach und nach AB, AC, AD, BC, BD, CD und die ihnen gleichen aber entgegengesetzt gerichteten Abschnitte — im Ganzen also 12 — als die geschnittenen Strecken auftreten, und von den jedesmal beiden andern Buchstaben bald der eine, bald der andere den ersten Schneidepunkt bezeichnen können. Es wird sich aber zeigen, dass jedes Doppelverhältniss zwischen vier Punkten aus jedem beliebigen andern derselben vier Punkte abgeleitet werden kann. Zunächst hat man

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = \frac{BD}{DA} : \frac{BC}{CA} = \frac{CA}{AD} : \frac{CB}{BD} = \frac{DB}{BC} : \frac{DA}{AC}$$

d. i.

I. $\quad (ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA)$,

wovon man sich leicht überzeugt, da jedes Doppelverhältniss $= \dfrac{AC.DB}{AD.CB}$ ist.

*) Jenachdem der äussere Punkt vor, in, oder hinter dem harmonischen Punkte liegt, welchem der innere zugeordnet ist, — „vor“ und „hinter“ gemäss der Richtung von A nach B beurtheilt.

Jedes Doppelverhältniss $(ABCD)$ lässt sich also in ein anderes gleichwerthiges verwandeln, in dessen symbolischem Ausdruck einer der drei andern Buchstaben B, C, D als Anfangsbuchstabe vorkommt, wenn man die beiden letzten Buchstaben mit den beiden ersten und zwar entweder jedes Paar in derselben Reihenfolge oder jedes in der entgegengesetzten vertauscht.

Desgleichen müssen von den übrigen 20 Doppelverhältnissen je vier einander gleich sein, deren symbolische Ausdrücke ebenso der Reihe nach A, B, C, D zu Anfangsbuchstaben haben. Somit sind nur noch die Beziehungen derjenigen Doppelverhältnisse aufzusuchen übrig, deren Ausdrücke einerlei Anfangsbuchstaben, z. B. A haben, und deren es 6 giebt, nämlich

$$(ABCD),\quad (ABDC),\quad (ACBD),$$
$$(ACDB),\quad (ADBC),\quad (ADCB).$$

Dieselben lassen sich einmal so verbinden, dass die Summe je zweier gleich 1 ist, und sodann, dass das Produckt je zweier gleich 1 ist.

Zwei Doppelverhältnisse zwischen denselben vier Punkten, deren Werthe zur Summe 1 geben, mögen complementäre und diejenigen zwei, deren Product gleich 1 ist, reciproke Doppelverhältnisse heissen.

Man hat nun

$$\left(\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DB}\right)\left(\frac{AD}{DB}:\frac{AC}{CB}\right)=1,$$

oder

$$\text{II.}\qquad \left\{\begin{array}{l}(ABCD)\ (ABDC)=1;\ \text{ebenso}\\ (ACDB)\ (ACBD)=1;\\ (ADBC)\ (ADCB)=1;\end{array}\right.$$

Vertauscht man in dem symbolischen Ausdruck eines Doppelverhältnisses die beiden letzten Buchstaben, so erhält man das reciproke Doppelverhältniss.

In Verbindung mit I. bildet man somit auch das reciproke Doppelverhältniss, wenn man die beiden ersten Buchstaben im symbolischen Ausdrucke desselben versetzt.

Nach §. 7 hat man ferner zwischen irgend vier Punkten A, B, C, D einer Graden die Beziehung

$$AC\,.\,BD+CB\,.\,AD+BA\,.\,CD=0,$$

hieraus folgt

$$\frac{AC}{CB}\cdot\frac{BD}{AD}+\frac{BA}{CB}\cdot\frac{CD}{AD}=-1,$$

$$\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DB}+\frac{AB}{BC}:\frac{AD}{DC}=1,$$

oder

III. $$\begin{cases}(ABCD)+(ACBD)=1;\ \text{ebenso ist}\\(ACDB)+(ADCB)=1;\\(ADBC)+(ABDC)=1;\end{cases}$$

Vertauscht man also in dem symbolischen Ausdruck eines Doppelverhältnisses die mittleren Buchstaben, so erhält man ein anderes, welches das erstere zur Einheit ergänzt; oder: durch Versetzung der mittleren Buchstaben bildet man das complementäre Doppelverhältniss.

§. 28.

Fortsetzung. Mittels der unter I., II., III. bemerkten Beziehungen kann der Werth jedes Doppelverhältnisses zwischen vier Punkten einer Graden durch jedes andere zwischen denselben vier Punkten gebildete ausgedrückt werden. Man verwandelt erst das gegebene Doppelverhältniss nach I. in ein solches ihm gleichwerthiges, das denselben Anfangsbuchstaben mit demjenigen hat, dessen Werth gesucht wird, und hierauf sieht man zu, ob eine oder die andere oder beide der unter II. und III. aufgeführten Relationen Anwendung finden, z. B.

1) Es sei $(ABCD)=\lambda$, welchen Werth hat $(CABD)$?
Es ist $(ABCD)=(CDAB)=\lambda$, (nach I),
ferner $(CADB)=1-(CDAB)=1-\lambda$ (nach III.),
endlich $(CABD)=\frac{1}{(CADB)}=\frac{1}{1-\lambda}$ (nach II.).

2) Es sei $(CBAD)=\lambda$, wie gross ist $(DBAC)$?
Es ist $(CBAD)=(DABC)=\lambda$,
und $DBAC=1-(DABC)=1-\lambda$.

3) Es sei $(BDCA)=\lambda$, wie gross ist $(CDAB)$?
Es ist $(BDCA)=(CABD)=\lambda$,

$$(CADB) = \frac{1}{(CABD)} = \frac{1}{\lambda},$$

$$(CDAB) = 1 - (CADB) = 1 - \frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda - 1}{\lambda}.$$

Sämmtliche 24 Doppelverhältnisse, welche zwischen vier Punkten A, B, C, D einer Graden aufgestellt werden können, lassen sich somit leicht feststellen, wenn eines derselben gegeben ist. Ist $(ABCD) = \lambda$, so hat man

$$(ABCD) = \lambda \qquad (CABD) = \frac{1}{1-\lambda}$$
$$(ABDC) = \frac{1}{\lambda} \qquad (CADB) = 1-\lambda$$
$$(ACBD) = 1-\lambda \qquad (CBAD) = \frac{\lambda}{\lambda-1}$$
$$(ACDB) = \frac{1}{1-\lambda} \qquad (CBDA) = \frac{\lambda-1}{\lambda}$$
$$(ADBC) = \frac{\lambda-1}{\lambda} \qquad (CDAB) = \lambda$$
$$(ADCB) = \frac{\lambda}{\lambda-1} \qquad (CDBA) = \frac{1}{\lambda}$$
$$(BACD) = \frac{1}{\lambda} \qquad (DABC) = \frac{\lambda}{\lambda-1}$$
$$(BADC) = \lambda \qquad (DACB) = \frac{\lambda-1}{\lambda}$$
$$(BCAD) = \frac{\lambda-1}{\lambda} \qquad (DBAC) = \frac{1}{1-\lambda}$$
$$(BCDA) = \frac{\lambda}{\lambda-1} \qquad (DBCA) = 1-\lambda$$
$$(BDAC) = 1-\lambda \qquad (DCAB) = \frac{1}{\lambda}$$
$$(BDCA) = \frac{1}{1-\lambda} \qquad (DCBA) = \lambda.$$

§. 29.

Zusätze. Die drei Doppelverhältnisse

$$(ABCD) = \lambda; \quad (ACDB) = \frac{1}{1-\lambda}, \quad (ADBC) = \frac{\lambda-1}{\lambda},$$

in deren symbolischen Ausdrücken ein und derselbe Anfangsbuchstabe vorkommt, während die drei andern Buchstaben die cyklischen Folgen

$$BCD, \quad CDB, \quad DBC$$

darstellen, haben die bemerkenswerthen Beziehungen zu einander, dass

a) ihr Product der negativen Einheit gleich ist,*)

b) dass der reciproke Werth eines jeden dem Complement des vorhergehenden — ebenfalls bei cyklischer Aufeinanderfolge — gleich ist, oder dass

$$\frac{1}{(ACDB)} = 1 - (ABCD),$$
$$\frac{1}{(ADBC)} = 1 - (ACDB),$$
$$\frac{1}{(ABCD)} = 1 - (ADBC),$$

wovon man sich leicht mit Hülfe der im vorhergehenden §. angegebenen Werthe überzeugen kann.

2) Von den drei genannten Doppelverhältnissen haben immer zwei einen positiven und das dritte einen negativen Werth, wie sich aus der Betrachtung von λ, $\frac{1}{1-\lambda}$ und $\frac{\lambda}{\lambda - 1}$ ergiebt, mag dabei λ eine positive oder negative Zahl, grösser oder kleiner als 1 sein. Dasselbe ist auch leicht aus 1, b. zu folgern.

§. 30.

Beziehung zweier Doppelverhältnisse bei sechs Punkten einer Graden. Das Product zweier Doppelverhält- $(ABCD).(ABEF)$, in deren Ausdrücken dieselben zwei ersten Buchstaben vorkommen (welche aus derselben geschnittenen Strecke AB mit verschiedenen Schnittpunkten, C, D und E, F hervorgegangen sind), bleibt seinem Werthe nach unverändert, wenn man in den Ausdrücken der Doppelverhältnisse die dritten (oder auch die vierten) Buchstaben mit einander vertauscht; d. h. es ist

$$(ABCD)\,(ABEF) = (ABED)\,(ABCF).$$

*) Dieser Satz lässt auch folgende Fassung zu: Werden die drei Strecken AB, BC, CA, deren Summe $= 0$, gemeinsam in einen vierten Punkt D und jede ausserdem in dem dritten nicht als Grenzpunkt in ihr vorkommenden Punkt, also AB in C, BC in A und CA in B geschnitten, so ist das Product der drei Doppelverhältnisse, in deren Ausdrücken D eine und dieselbe Stelle einnimmt, der negativen Einheit gleich; oder

$$(ABCD)\,(BCAD)\,(CABD) = -1,$$

ebenso

$$(ABDC)\,(BCDA)\,(CADB) = -1.$$

Von der Richtigkeit des Satzes überzeugt man sich sofort, wenn man die Doppelverhältnisse in der gewöhnlichen Form oder als Producte von Verhältnissen schreibt.

Da $(ABEF) = \frac{1}{(ABFE)}$ ist, so kann man vorstehenden Satz auch in folgender Form ausdrücken:

$$\frac{(ABCD)}{(ABFE)} = \frac{(ABCF)}{(ABDE)} = \frac{(ABED)}{(ABFC)},$$

d. h. der Quotient zweier Doppelverhältnisse, welche in ihren beiden ersten Buchstaben übereinstimmen, bleibt unverändert, wenn man den $\left\{\begin{matrix}\text{dritten}\\ \text{vierten}\end{matrix}\right\}$ Buchstaben im symbolischen Ausdrucke des Divisors mit dem $\left\{\begin{matrix}\text{vierten}\\ \text{dritten}\end{matrix}\right\}$ des Dividenden vertauscht.

§. 31.

Beziehungen dreier Doppelverhältnisse bei fünf Punkten einer Graden. Sind A, B, C, D, E fünf Punkte einer Graden, so ist

$$\left(\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}\right)\left(\frac{AD}{DB} : \frac{AE}{EB}\right)\left(\frac{AE}{EB} : \frac{AC}{CB}\right) = 1.$$

oder $$(ABCD)\,(ABDE)\,(ABEC) = 1,$$

wie die angedeuteten Operationen von selbst ergeben.

Da auch $(ABEC)\,(ABCE) = 1$ ist, so lässt sich vorstehende Beziehung auch in folgenden Formen geben

$$(ABCD)\,(ABDE) = (ABCE),$$
$$(ABCE) : (ABCD) = (ABDE).$$

Mit Hülfe derselben kann man bei einem Systeme von fünf Punkten einer Graden aus zwei Doppelverhältnissen, welche drei Punkte gemeinschaftlich haben, einen derselben eliminiren und jedes zwischen den übrigen vier Punkten bestehende Doppelverhältniss bestimmen.

Sind also drei Doppelverhältnisse, von denen jedes drei Punkte mit den andern gemein hat, ihrem Werthe nach gegeben, so kann man zwei dieser Punkte eliminiren. Seien z. B. die drei Doppelverhältnisse gegeben:

$$(ABCD) = \delta, \quad (ABCE) = \varepsilon, \quad (ABCF) = \vartheta,$$

so bekommt man durch Elimination von C

$$(ABDE) = \frac{\varepsilon}{\delta}, \quad (ABEF) = \frac{\vartheta}{\varepsilon}.$$

Um aus diesen B zu eliminiren, bilde man aus letzteren nach §. 27

$$(AEBD) = \frac{\varepsilon - \delta}{\varepsilon}, \quad (AEBF) = \frac{\varepsilon - \vartheta}{\varepsilon},$$

woraus man endlich

$$(AEDF) = \frac{\varepsilon - \vartheta}{\varepsilon - \delta}$$

erhält.

Aus vier Doppelverhältnissen

$$(ABCD) = \delta, \quad (ABCE) = \varepsilon, \quad (ABCF) = \vartheta, \quad (ABCG) = \eta$$

mit denselben drei gemeinschaftlichen Punkten A, B, C können diese sämmtlich eliminirt, und somit ein Doppelverhältniss zwischen den übrigen vier Punkten bestimmt werden. Nachdem man, wie oben aus den drei ersten B und C, und ebenso aus dem ersten, zweiten und vierten, dieselben Punkte eliminirt hat, wodurch man

$$(AEDF) = \frac{\varepsilon - \vartheta}{\varepsilon - \delta}, \quad (AEDG) = \frac{\varepsilon - \eta}{\varepsilon - \delta}$$

und daraus

$$(DEAF) = \frac{\varepsilon - \vartheta}{\delta - \vartheta}, \quad (DEAG) = \frac{\varepsilon - \eta}{\delta - \eta}$$

erhalten, ergiebt sich zuletzt

$$(DEFG) = \frac{(\varepsilon - \eta)\,(\delta - \vartheta)}{(\delta - \eta)\,(\varepsilon - \vartheta)}.$$

§. 32.

Lehrsatz. Sind bei n Punkten einer Graden von den zwischen ihnen zu bildenden Doppelverhältnissen $n-3$ von einander unabhängige gegeben, so lassen sich daraus alle übrigen bestimmen.

Beweis. Setzt man von den n Punkten A, B, C, D ... der Graden die Doppelverhältnisse

(N) $\quad (ABCD) = \delta, \quad (ABCF) = \varepsilon, \quad (ABCE) = \vartheta, \quad ABCG = \eta$

u. s. w., in denen immer dieselben drei Punkte A, B, C vorkommen und deren Anzahl $n-3$ ist, so lassen sich nach dem vorhergehenden Satze alle übrigen Doppelverhältnisse zwischen irgend vieren der n Punkte bestimmen.

Unter diesen, und unter den mit (N) bezeichneten müssen sich aber die $n-3$ Doppelverhältnisse, welche im Lehrsatze als gege-

ben vorausgesetzt werden, sowie irgend ein gesuchtes befinden, welche somit sämmtlich als Funktionen der $n-3$ Werthe $\delta, \varepsilon, \vartheta\ldots$ ausgedrückt sind. Eliminirt man aus diesen $n-2$ Gleichungen $\delta, \varepsilon, \vartheta\ldots$, so erhält man den Werth des gesuchten Doppelverhältnisses als Funktion der Werthe der gegebenen $n-3$ Doppelverhältnisse.

Seien z. B. zwischen 6 Punkten A, B, C, D, E, F einer Graden die Doppelverhältnisse $(ACDE) = \lambda$, $(ACEF) = \mu$, $(BDEF) = \nu$ gegeben und es werde der Werth des Doppelverhältnisses $(ABDF) = \omega$ gesucht, so setze man

$$1)\ (ABCD) = \delta,\quad 2)\ (ABCE) = \varepsilon,\quad 3)\ (ABCF) = \vartheta,$$

eliminire aus 1) und 2) B, indem man

$$(ACBD) = 1-\delta,\quad (ACBE) = 1-\varepsilon$$

bildet, woraus sich

$$(ACDE) = \frac{1-\varepsilon}{1-\delta} = \lambda$$

ergiebt. In gleicher Weise erhält man aus 2) und 3)

$$(ACBE) = 1-\varepsilon,\quad (ACBF) = 1-\vartheta$$

und

$$(ACEF) = \frac{1-\vartheta}{1-\varepsilon} = \mu.$$

Durch Elimination von C aus 1) und 2) bekommt man

$$(ABDE) = \frac{\varepsilon}{\delta},\ \text{folglich}\ (BDAE) = \frac{\varepsilon-\delta}{\varepsilon},$$

desgleichen aus 1) und 3)

$$(ABDF) = \frac{\vartheta}{\delta} = \omega,\quad (BDAF) = \frac{\vartheta-\delta}{\vartheta}$$

und hieraus durch Elimination von A

$$(BDEF) = \frac{\varepsilon}{\vartheta}\,\frac{\vartheta-\delta}{\varepsilon-\delta} = \nu.$$

Eliminirt man endlich aus den Gleichungen

$$\lambda = \frac{1-\varepsilon}{1-\delta},\quad \mu = \frac{1-\vartheta}{1-\varepsilon},\quad \nu = \frac{\varepsilon}{\vartheta}\cdot\frac{\vartheta-\delta}{\varepsilon-\delta},\quad \omega = \frac{\vartheta}{\delta}$$

$\delta, \varepsilon, \vartheta$, so bekommt man den gesuchten Werth des Doppelverhältnisses $(ABDF)$

$$\omega = \frac{\lambda\mu(\mu-1)}{(\nu-1)(\lambda\mu-\mu-1)}$$

als Funktion der gegebenen Doppelverhältnisse.

§. 33.

Erklärung. Sind a, b, c, d vier beliebig gerichtete Grade einer Ebene, so soll der dem Doppelverhältnisse zwischen vier Punkten einer Graden ähnlich gebildete Ausdruck

$$\frac{\sin a^\wedge c}{\sin c^\wedge b} : \frac{\sin a^\wedge d}{\sin d^\wedge b}$$

ein Doppelverhältniss dieser vier Graden genannt und symbolisch mit

$$\sin (abcd)$$

bezeichnet werden.

Dabei werden alle Winkel nach einem und demselben beliebig gewählten Drehungssinn genommen und man kann hiernach c und d als zwei Grade betrachten, von denen jede den Richtungsunterschied $a^\wedge b$ in zwei Theile $a^\wedge c$ und $c^\wedge b$, $a^\wedge d$ und $d^\wedge b$ zerlegt, so dass stets mit Berücksichtigung von §. 12 $a^\wedge c + c^\wedge b = a^\wedge d + d^\wedge b = a^\wedge b$ für irgend welche gegenseitige Lagen der vier Graden ist.

Selbstverständlich soll auch immer das Zeichen einer Winkelfunktion sich nach dem Zeichen des Winkels, wie es gemäss dem §. 11 aufgestellten Princip zu bestimmen ist, in gewöhnlicher Weise richten, also beispielsweise $\sin a^\wedge b = -\sin b^\wedge a = -\sin(-a^\wedge b)$, $\cos a^\wedge b = \cos b^\wedge a$ etc. sein, was bereits in §. 15 und 17 beobachtet worden ist.

§. 34.

Beziehungen zwischen Doppelverhältnissen derselben vier Graden. Die Erörterungen von §. 26 lassen sich leicht auf Doppelverhältnisse zwischen vier Graden einer Ebene übertragen. Dem inneren oder äusseren Punkte eines gradlinigen Abschnitts entspricht hier eine Grade, deren positive Richtung entweder innerhalb oder ausserhalb des von den positiven Richtungen zweier anderer Graden gebildeten Winkels zu liegen kommt u. s. w. (vergl. §. 12).

Desgleichen lassen sich die unter §. 27—29 bemerkten Sätze ohne Weiteres übertragen. Man hat nämlich in gleicher Weise wie in 27

I. $\sin (abcd) = \sin (badc) = \sin (cdab) = \sin (dcba)$

II. $\sin (abcd) \cdot \sin (abdc) = 1$,

III. $\sin (abcd) + \sin (acbd) = 1$.

Von der Richtigkeit der Relationen I. und II. überzeugt man sich sofort, wenn man die Doppelverhältnisse in ihrer gewöhnlichen Form schreibt.

Die Gleichung unter III. ergiebt sich, wie die analoge in §. 27 aus dem Satze (§. 17)

$$\sin a^\wedge b \sin c^\wedge d + \sin b^\wedge c \,.\, \sin a^\wedge d + \sin c^\wedge a \,.\, \sin b^\wedge d = 0.$$

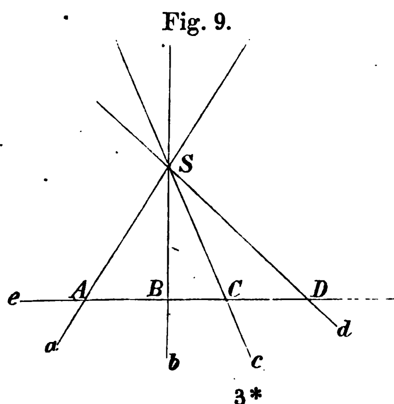
Jedes Doppelverhältniss zwischen vier Graden einer Ebene kann daher in derselben Weise, wie in §. 26 für Doppelverhältnisse zwischen vier Punkten einer Graden gezeigt worden ist, auf irgend ein anderes zwischen denselben vier Graden bezogen oder aus demselben berechnet werden.

§. 35.

Beziehung zwischen den Doppelverhältnissen von vier Graden einer Ebene und vier Punkten einer Graden. Alle obigen auf Doppelverhältnisse zwischen vier Graden einer Ebene bezüglichen Sätze haben natürlich auch in dem speciellen Falle ihre Giltigkeit, wenn die vier Graden durch einen und denselben Punkt S gelegt sind oder, wie man sagt, ein Strahlenbüschel (Strahlenbündel) mit dem Mittelpunkte S bilden. In diesem Falle kann aber das Doppelverhältniss zwischen vier Graden zu einem zwischen vier Punkten einer fünften Graden (Transversale) in eine engere und sehr einfache Beziehung treten, welche folgender Satz näher angiebt:

Wird irgend ein Strahlenbüschel von vier oder mehreren Graden durch eine Transversale geschnitten, so ist jedes Doppelverhältniss zwischen irgend vier Graden des Büschels gleich dem Doppelverhältniss zwischen denjenigen vier Punkten der Transversale, in welchen diese von denselben vier Graden geschnitten wird.

Fig. 9.



Seien a, b, c, d (Fig. 9) irgend vier Grade eines Strahlenbüschels mit dem gemeinsamen Durchschnittspunkte oder Mittelpunkte S und werde

von denselben eine beliebige Transversale in den Punkten A, B, C, D geschnitten, so sind die Doppelverhältnisse $\sin (abcd)$ und $(ABCD)$ einander gleich oder

$$\frac{\sin a^\wedge c}{\sin c^\wedge b} : \frac{\sin a^\wedge d}{\sin d^\wedge b} = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}.$$

Denn es ist

$$\frac{AS}{AC} = \frac{\sin ACS}{\sin ASC}, \quad \frac{BS}{CB} = \frac{\sin ACS}{\sin CSB},$$

folglich

$$1) \qquad \frac{AC}{CB} \cdot \frac{BS}{AS} = \frac{\sin ASC}{\sin CSB};$$

ebenso

$$\frac{AS}{AD} = \frac{\sin ADS}{\sin ASD}, \quad \frac{BS}{DB} = \frac{\sin ADS}{\sin DSB}$$

$$2) \qquad \frac{AD}{DB} \cdot \frac{BS}{AS} = \frac{\sin ASD}{\sin DSB}.$$

Durch Division von 1) durch 2) ergiebt sich

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = \frac{\sin ASC}{\sin CSB} : \frac{\sin ASD}{\sin DSB},$$

oder

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = \frac{\sin a^\wedge c}{\sin c^\wedge b} : \frac{\sin a^\wedge d}{\sin d^\wedge b},$$

$$(ABCD) = \sin (abcd).$$

Es ist leicht zu erkennen, dass die Gleichheit dieser Doppelverhältnisse nicht blos ihren absoluten Werthen, sondern auch durchgängig mit Berücksichtigung der Zeichen statt findet. Denn die Gleichheit der Verhältnisse zwischen den Seiten und Sinussen der gegenüberliegenden Winkel eines Dreiecks, worauf hier die Richtigkeit des Lehrsatzes in völliger Allgemeinheit begründet ist, hat nach den in §. 11, 18 u. f. aufgestellten Principien nicht blos dem absoluten Werthe, sondern auch dem Zeichen nach allgemeine Giltigkeit (vergleiche Moebius, Kreisverwandtschaft S. 532, Anmerkung). Uebrigens folgt auch nach den Auseinandersetzungen der eben bemerkten §§., dass, wenn von den drei Punkten A, B, C der letztere C ein $\left\{\begin{matrix}\text{innerer}\\ \text{äusserer}\end{matrix}\right\}$ der Strecke AB ist, ebenfalls von den drei Linien SA, SB, SC die letztere SC eine $\left\{\begin{matrix}\text{innerhalb}\\ \text{ausserhalb}\end{matrix}\right\}$ des Winkels ASB fallende Grade ist, d. i. mit andern Worten, sowie

$$AC + CB = AB,$$

ist auch in allen Fällen

$$SA^{\wedge}SC + SC^{\wedge}SB = SA^{\wedge}SB,$$

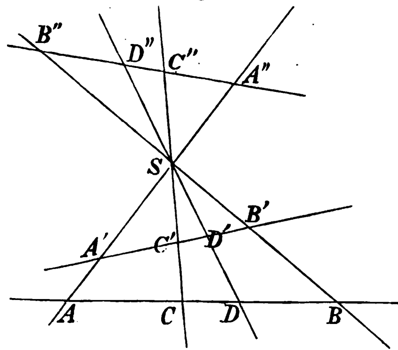
oder

$$ASC + CSB = ASB, \text{ (s. §. 19).}$$

§. 36.

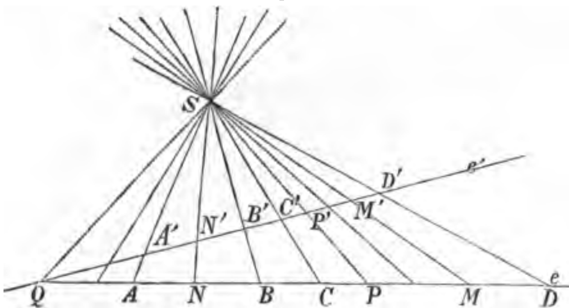
Folgesätze. Werden zwei Transversalen in einer Ebene vor vier sich in einem Punkte S (Fig. 10) schneidenden Graden a, b, c, d in den Punkten A, B, C, D und A', B', C', D', geschnitten, so ist das Doppelverhältniss $(A\,B\,C\,D)$ zwischen den Punkten der einen Transversale dem gleichgebildeten Doppelverhältniss $(A'B'C'D')$ zwischen den entsprechenden Punkten der andern Transversale gleich. Beide Doppelverhältnisse sind nämlich dem der vier Strahlen oder $sin\ (abcd)$ gleich.

Fig. 10.



Oder allgemeiner: Wenn von zwei beliebigen Graden e und e' (Fig. 11) einer Ebene die Punkte A, B, C ... M, N, P der einen den

Fig. 11.



Punkten A', B', C' ... M', N', P' der andern dergestalt entsprechen, dass die Verbindungsgraden AA', BB', CC' ... MM', NN', PP' je zweier Punkte sich in einem Punkte S schneiden, so ist jedes

Doppelverhältniss zwischen irgend vier Punkten der einen Graden dem gleichgebildeten Doppelverhältniss zwischen den entsprechenden vier Punkten der andern Graden gleich.

Dabei ist der Durchschnittspunkt Q der beiden Graden e und e' ein sich selbst entsprechender Punkt und bildet mit beliebigen drei Punkten M, N, P der einen Graden und mit den entsprechenden M', N', P' der andern Graden gleiche Doppelverhältnisse, d. i. $(MNPQ) = (M'N'P'Q)$.

2) Mit Berücksichtigung des Durchschnittspunktes Q der beiden Graden e und e' lässt sich der vorstehende Satz folgendergestalt umkehren.

Entsprechen auf zwei Graden e und e' die Punkte A, B, . . . NP . . . der einen den Punkten A', B' . . . $N'P'$ der andern so, dass irgend drei Punkte M, N, P der ersteren mit dem Durchschnittspunkte Q der beiden Graden dasselbe Doppelverhältniss bilden, wie die entsprechenden Punkte M', N', P' der andern Graden mit demselben Punkte Q; d. i. ist $(MNPQ) = (M'N'P'Q')$, so gehen die Verbindungsgraden AA', BB' . . . NN', PP' durch einen Punkt S.

Sei zunächst S der Durchschnittspunkt der beiden Verbindungsgraden MM' und NN' und treffe die von S nach P gezogene Grade SP die e' im Allgemeinen in dem Punkte P''; so hat man für denselben

$$(MNPQ) = (M'N'P''Q),$$

folglich nach der Voraussetzung

$$(M'N'P'Q) = (M'N'P''Q),$$

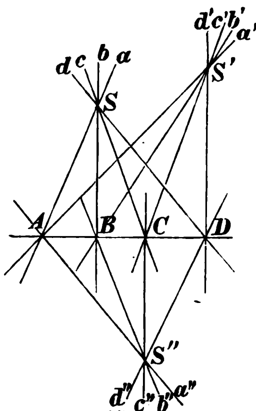
d. h. der Punkt P'' fällt mit P' zusammen. (§. 26. 2.) oder die Grade PP' geht durch den Durchschnittspunkt S der Graden MM', NN'. Da sich aus den Voraussetzungen

$$(MNAQ) = (M'N'A'Q),$$
$$MNBQ = (M'N'B'Q)$$

dasselbe von jeder andern Verbindungsgraden AA', BB' . . . ebenso wie von PP' erweisen lässt, so gilt (nöthigenfalls mit Berücksichtigung von §. 32) der Satz allgemein.

3) Gehen durch vier Punkte A, B, C, D (Fig. 12) einer Graden zwei Systeme in je einem Punkte S, S' sich schneidender Graden oder zwei vierstrahlige Büschel a, b, c, d und a', b', c', d' dergestalt, dass a und a in A, b und b' in B u. s. w. sich treffen, so ist das Doppelverhältniss $\sin\,(abcd)$ des einen Büschels dem gleichgebil-

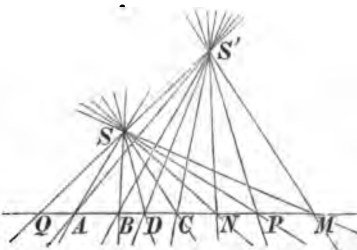
Fig. 12.



deten *sin* $(a'b'c'd')$ des andern gleich; denn beide Doppelverhältnisse sind dem der vier Punkte $(ABCD)$ gleich.

Oder allgemeiner: Wenn von zwei vielstrahligen Linienbüscheln, deren Mittelpunkte S und S' sind (Fig. 13), die Strahlen $a, b, c, \ldots m, n, p$ des einen den Strahlen $a', b', c' \ldots m', n', p'$ des andern dergestalt entsprechen, dass die Durchschnittspunkte $A, B, C, \ldots$ zweier entsprechenden Strahlen a und a', b und b', c und $c' \ldots$ in Einer Graden liegen; so ist jedes Doppelverhältniss zwischen irgend vier Strahlen des einen Büschels dem gleichgebildeten Doppelverhältniss zwischen den entpreehenden Strahlen des andern gleich.

Fig. 13.



Dabei ist die Verbindungsgrade q der beiden Mittelpunkte S und S' ein sich selbst entsprechender Strahl und bildet mit beliebigen drei Strahlen m, n, p des einen Büschels und mit den entsprechenden m', n', p' des andern gleiche Doppelverhältnisse, d. i. $sin\ (mnpq) = sin\ (m'n'p'q)$.

4. Auch dieser Satz lässt sich in folgender Form umkehren. Entsprechen von zwei Linienbüscheln S und S' die Strahlen $a, b, c \ldots n, p \ldots$ des einen den Strahlen $a', b', c' \ldots n', p' \ldots$ des andern dergestalt, dass irgend drei Strahlen m, n, p des einen mit dem beiden Büscheln gemeinschaftlichen Strahle q (SS') dasselbe Doppelverhältniss bilden, wie die entsprechenden Strahlen $m', n'\ p'$ des andern Büschels mit demselben Strahle q; d. h. ist $sin\ (mnpq) = sin\ (m'n'p'q)$: so liegen die Durchschnittspunkte $A, B, C, \ldots N, P \ldots$ entsprechender Strahlen a und a', b und b', c und $c' \ldots n$ und n', p und $p' \ldots$ in E i n e r G r a d e n.

Sei zunächst s eine durch M und N gelegte Grade, welche den gemeinschaftlichen Strahl q (SS') in Q, sowie die Strahlen p und p' in den Punkten P' und P'' treffe. Da nun $sin\ (mnpq) = (MNP'Q)$ und $sin\ (m'n'p'q') = (MNP''Q)$, so ist nach der Voraussetzung

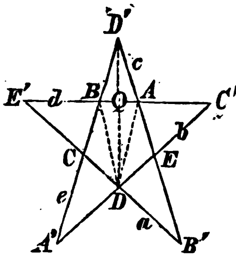
$\sin(mnpq) = \sin(m'n'p'q)$, auch $(MNP'Q) = (MNP''Q)$ d. h. P' und P'' fallen zusammen in dem Durchschnittspunkte P der beiden Strahlen p und p'. Da sich aus den Voraussetzungen $\sin(mnaq) = \sin(m'n'a'q)$, $\sin(mnbq) = \sin(m'n'b'q) \ldots$ ein Gleiches von den Durchschnittspunkten A, $B \ldots$ ebenso wie von P erweisen lässt, so u. s. w.

Anmerkung. Zwei auf zwei Graden liegende Reihen von Punkten oder schlechthin zwei gradlinige Punktreihen, bei denen das Doppelverhältniss von irgend vier Punkten der einen Reihe dem gleichgebildeten Doppelverhältniss der entsprechenden vier Punkte der anderen Reihe gleich ist, heissen nach Möbius collineare (nach Steiner projectivische) Punktreihen. Ist dabei der Durchschnittspunkt der beiden Graden, in denen die beiden Reihen liegen, ein selbstentsprechender, oder genügt derselbe den in 2) gemachten Voraussetzungen, so heissen ausserdem die Reihen perspectivisch. Ebenso sind zwei Strahlenbüschel einander collinear (projectivisch), wenn das Doppelverhältniss von irgend vier Strahlen des einen dem gleichgebildeten Doppelverhältniss der vier entsprechenden Strahlen des andern gleich ist. Ist dabei die Verbindungsgrade der Mittelpunkte beider Büschel ein selbstentsprechender Strahl oder wird den Voraussetzungen in 4) Genüge geleistet, so heissen ausserdem die Strahlbüschel (oder deren Lage) perspectivisch. (Das Weitere darüber in einem der folgenden Capitel.)

§. 37.

Relation zwischen den Doppelverhältnissen auf fünf Graden einer Ebene. Sind a, b, c, d, e fünf beliebige Grade in einer Ebene, deren jede von den übrigen im Allgemeinen in vier Punkten geschnitten wird, so lassen sich aus den beiden Doppelverhältnissen zwischen den Punkten, in welchen zwei Grade von den jedesmal übrigen geschnitten werden, alle anderen Doppelverhältnisse auf den übrigen Graden bestimmen. Wird (Fig. 14)

Fig. 14.



a	von	b, c, d, e	in den Punkten	D, B', E', C geschnitten
b	„	c, d, e, a	„ „ „	E, C', A', D „
c	„	d, e, a, b	„ „ „	A, D', B', E „
		u. s. w.		u. s. w.

und zieht man noch BD, AD und $D'D$, welche letztere Grade die d in dem Punkte Q schneide, so ist

$$(B'EAD') = (E'C'AQ),$$
$$(C A' D' B) = (E' C' Q B);$$

multiplicirt man beide Gleichungen und bemerkt, dass nach §. 31

$$(E'C'AQ)\,(E'C'QB) = (E'C'AB)$$

ist, so ergiebt sich

$$(B'EAD')\,(CA'D'B) = (E'C'AB)$$

oder

$$(B'EAD')(E'C'BA)\,(CA'D'B) = 1:$$

eine Beziehung zwischen den Doppelverhältnissen der Punkte auf den Graden c, d, e, nach welcher jedes derselben aus den beiden andern sich berechnen lässt. Dieselbe lässt sich in der Form eines mit ihr verwandten und oben §. 31 angegebenen Satzes ausdrücken, wenn man nach Möbius unter

$$^{a}(bcde)$$

das Doppelverhältniss zwischen den vier Punkten der Graden a bezeichnet, in welchen dieselbe von den vier andern Graden b, c, d, e geschnitten wird.

Demnach ist

$(B'EAD')$ gleichbedeutend mit $^{c}(abde)$
$(E'C'AB)$ „ „ $^{d}(abce)$
$(CA'D'B)$ „ „ $^{e}(abcd)$

und letztere Gleichung nimmt folgende Formen an:

$$^{c}(abde)\,.\,^{d}(abec)\,.\,^{e}(abcd) = 1,$$
$$^{c}(abde)\,.\,^{d}(abec) = {}^{e}(abdc),$$
$$^{c}(abed) : {}^{d}(abec) = {}^{e}(abcd)$$

übereinstimmend mit den Gleichungen in §. 31.

Es ist leicht abzusehen, wie man von hier aus auf die Bestimmung der Doppelverhältnisse zwischen den Punkten der Graden a und b übergehen kann, und dass aus zwei Doppelverhältnissen zwischen den Punkten auf zweien der fünf Graden alle übrigen Doppelverhältnisse zwischen den Punkten auf den übrigen Graden bestimmt werden können. Sei z. B.

$$^{a}(bcde) = \lambda, \quad ^{b}(cdea) = \mu$$

gegeben, aus welchen $^{d}(eabc) = \omega$ berechnet werden soll. Nach der letzten der obigen Gleichungen ist

$$^{a}(cedb) : {}^{b}(ceda) = {}^{d}(ceab)$$

und nach §. 27

$$^{a}(cedb) = \frac{1}{1-\lambda}; \quad ^{b}(ceda) = 1-\mu; \quad ^{d}(ceab) = \frac{\omega}{\omega-1};$$

folglich

$$\frac{1}{(1-\lambda)(1-\mu)}=\frac{\omega}{\omega-1},$$

$$\omega=\frac{1}{1-(1-\lambda)(1-\mu)}=\frac{1}{\lambda+\mu-\lambda\mu}.$$

§. 38.

Lehrsatz. Sind allgemein bei n Graden in einer Ebene von den Doppelverhältnissen, welche in diesen Graden zwischen ihren gegenseitigen Durchschnittspunkten gebildet werden, $2n-8$ von einander unabhängige gegeben, so sind damit alle übrigen gegeben.

Beweis. Jede der n Graden wird von den übrigen in $n-1$ Punkten geschnitten; sind nun von den Doppelverhältnissen, welche zwischen den Punkten in einer dieser Graden gebildet werden können, $(n-1)-3$ von einander unabhängige gegeben, so sind nach §. 32 auch alle übrigen derselben Graden bestimmt. Man setze daher einstweilen die $n-4$ unabhängigen Doppelverhältnisse auf a

$$^a(bcde)=\alpha_1,\quad ^a(bcdf)=\alpha_2,\ldots,\quad ^a(bcdn)=\alpha_{n-4}$$

und die $n-4$ unabhängigen Doppelverhältnisse auf b

$$^b(acde)=\beta_1,\quad ^b(acdf)=\beta_2,\ldots\quad ^b(acdn)=\beta_{n-4}$$

so lassen sich nach vorigem §. aus je zwei unter einander stehenden α_1 und β_1, α_2 und β_2... wieder $n-4$ unabhängige Doppelverhältnisse zwischen Punkten, welche auf der Linie c oder d liegen, ableiten und aus diesen alle noch übrigen, welche zwischen Punkten auf denselben beiden Graden gebildet werden können. In gleicher Weise kann man auch auf alle übrigen Graden und die auf denselben liegenden Durchschnittspunkte übergehen, weil mit den Doppelverhältnissen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{n-4}$, $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_{n-4}$ alle übrigen auf a und b gegeben sind; so dass man aus den $2n-8$ Werthen α_1, $\alpha_2 \ldots$, β_1, $\beta_2 \ldots$ die Werthe aller übrigen, zwischen den Punkten auf allen Graden aufzustellenden Doppelverhältnisse, also auch die gegebenen $2n-8$, sowie ein gesuchtes $(2n-7)$tes als Funktionen von $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \beta_1, \beta_2 \ldots$ ausdrücken kann. Aus diesen $2n-7$ Gleichungen lassen sich aber die $2n-8$ Grössen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \beta_1, \beta_2 \ldots$ eliminiren, wodurch der Werth des gesuchten Doppelverhältnisses als Funktion der gegebenen $2n-8$ Doppelverhältnisse sich ergiebt.

§. 39.

Andere Ausdrücke für Doppelverhältnisse von vier Punkten oder Strahlen. 1) Dem Doppelverhältniss $(ABCD)$ zwischen vier Punkten einer Graden lässt sich noch ein anderer als der gewöhnliche Ausdruck geben. Es ist nämlich

$$\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DB}=\frac{AB+BC}{CB}:\frac{AB+BD}{DB},$$
$$=\left(\frac{AB}{CB}-1\right):\left(\frac{AB}{DB}-1\right);$$

dividirt man die Glieder des letzteren Verhältnisses durch AB, so ergiebt sich

$$\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DB}=\left(\frac{1}{CB}-\frac{1}{AB}\right):\left(\frac{1}{DB}-\frac{1}{AB}\right),$$

oder

$$(ABCD)=\left(\frac{1}{AB}+\frac{1}{BC}\right):\left(\frac{1}{AB}+\frac{1}{BD}\right); \text{ ebenso ist}$$
$$(BADC)=\left(\frac{1}{BA}+\frac{1}{AD}\right):\left(\frac{1}{BA}+\frac{1}{AC}\right),$$
$$(CDAB)=\left(\frac{1}{CD}+\frac{1}{DA}\right):\left(\frac{1}{CD}+\frac{1}{DB}\right),$$
$$(DCBA)=\left(\frac{1}{DC}+\frac{1}{CB}\right):\left(\frac{1}{DC}+\frac{1}{CA}\right),$$

wodurch ein und dasselbe Doppelverhältniss zwischen vier Punkten A, B, C, D einer Graden ausgedrückt ist.

2) Nach §. 31 hat man bei fünf Punkten A, B, C, D, Q einer Graden

$$(ABCD)=(ABCQ):(ABDQ),$$

hieraus folgt nach §. 27

$$ABCD=[1-(ACBQ)]:[1-(ADBQ)]$$

oder, wenn man die Doppelverhältnisse in gewöhnlicher Form schreibt

$$(ABCD)=\left[1-\left(\frac{AB}{BC}:\frac{AQ}{QC}\right)\right]:\left[1-\left(\frac{AB}{BD}:\frac{AQ}{QD}\right)\right],$$

und das Verhältniss $AB:AQ$ als gemeinschaftlichen Faktor herausdividirt

$$(ABCD) = \left[\frac{QA}{AB} - \frac{QC}{CB}\right] : \left[\frac{QA}{AB} - \frac{QD}{DB}\right], \text{ ebenso ist}$$

$$(BADC) = \left[\frac{QB}{BA} - \frac{QD}{DA}\right] : \left[\frac{QB}{BA} - \frac{QC}{CA}\right],$$

$$(CDAB) = \left[\frac{QC}{CD} - \frac{QA}{AD}\right] : \left[\frac{QC}{CD} - \frac{QB}{BD}\right],$$

$$(DCBA) = \left[\frac{QD}{DC} - \frac{QB}{BC}\right] : \left[\frac{QD}{DC} - \frac{QA}{AC}\right] :$$

vier gleichbedeutende Ausdrücke eines und desselben Doppelverhältnisses zwischen vier Punkten A, B, C, D einer Graden, in welchen noch ein willkürlicher fünfter Punkt Q derselben Graden vorkommt.

Nimmt man den Punkt Q als den unendlich entfernten Punkt der Graden an, so sind die Verhältnisse

$$\frac{AQ}{QC} = \frac{AQ}{QD} = -1$$

und das Doppelverhältniss $(ABCD)$ geht über in

$$\left[1 + \frac{AB}{BC}\right] : \left[1 + \frac{AB}{BD}\right]$$

oder nachdem man AB herausdividirt hat,

$$(ABCD) = \left[\frac{1}{AB} + \frac{1}{BC}\right] : \left[\frac{1}{AB} + \frac{1}{BD}\right]$$

d. h. die erste der unter 1) bemerkten Relationen.

3) In ähnlicher Weise findet man für fünf beliebige Grade a, b, c, d, q einer Ebene

$$\sin(abcd) = \left[1 - \left(\frac{\sin a^\wedge b}{\sin b^\wedge c} : \frac{\sin a^\wedge q}{\sin q^\wedge c}\right)\right] : \left[1 - \left(\frac{\sin a^\wedge b}{\sin b^\wedge d} : \frac{\sin a^\wedge q}{\sin q^\wedge d}\right)\right],$$

$$\sin(abcd) = \left[\frac{\sin q^\wedge a}{\sin a^\wedge b} - \frac{\sin q^\wedge c}{\sin c^\wedge b}\right] : \left[\frac{\sin q^\wedge a}{\sin a^\wedge b} - \frac{\sin q^\wedge d}{\sin d^\wedge b}\right], \text{ ebenso}$$

$$\sin(badc) = \left[\frac{\sin q^\wedge b}{\sin b^\wedge a} - \frac{\sin q^\wedge d}{\sin d^\wedge a}\right] : \left[\frac{\sin q^\wedge b}{\sin b^\wedge a} - \frac{\sin q^\wedge c}{\sin c^\wedge a}\right],$$

u. s. w.

4) Nimmt man dabei die beliebige Grade q senkrecht zu b an, so ist

$$q^\wedge a = q^\wedge b + b^\wedge a = 90^0 - a^\wedge b$$

und $\sin q^\wedge a = \cos a^\wedge b$; ebenso $\sin q^\wedge c = \cos c^\wedge b$ u. s. w.

$$\frac{\sin q^\wedge a}{\sin a^\wedge b} = \cot a^\wedge b, \quad \frac{\sin q^\wedge c}{\sin c^\wedge b} = \cot cb \text{ u. s. w.},$$

somit $\quad sin\,(abcd) = (cot\, a^\wedge b - cot\, c^\wedge b) : (cot\, a^\wedge b - cot\, d^\wedge b)$
oder $\quad sin\,(abcd) = (cot\, a^\wedge b + cot\, b^\wedge c) : (cot\, a^\wedge b + cot\, b^\wedge d)$
ebenso findet man, wenn q senkrecht zu a angenommen wird,

$$sin\,(badc) = (cot\, b^\wedge a + cot\, a^\wedge d) : (cot\, b^\wedge a + cot\, a^\wedge c)$$

u. s. w. (vergl. 2.)

§. 40.

Zurückführung eines Doppelverhältnisses auf ein einfaches und umgekehrt. Das Doppelverhältniss zwischen vier Punkten einer Graden oder zwischen vier Strahlen einer Ebene kann in zwei besonderen Fällen sich auf ein einfaches reduciren.

1) Seien A, B, C, D vier Punkte einer Graden und SA, SB, SC SD vier nach denselben von einem Punkte S der Ebene gezogene Strahlen. Letztere mögen noch durch eine andere Transversale in den Punkten A', B', C', D' geschnitten werden, so dass also $(ABCD) = (A'B'C'D')$ ist. Legt man nun diese Transversale

a) einem der Strahlen z. B. SD parallel, so wird der Durchschnittspunkt D' der unendlich ferne Punkt der Transversale $A'B'C'$ und von den beiden Doppelverhältnissen reducirt sich das letztere $(A'B'C'D')$ auf $\frac{A'C'}{B'C'}$, weil $\frac{A'D'}{D'B'} = -1$ ist. Man hat somit

$(ABCD) = A'C' : B'C'$, wenn $A'B'C'$ parallel SD, ebenso
$(ABCD) = (BADC) = B'D' : A'D'$, „ $B'A'D'$ „ SC,
$(ABCD) = (CDAB) = C'A' : D'A'$, „ $C'D'A'$ „ SB,
$(ABCD) = (DCBA) = D'B' : C'B'$, „ $D'C'B'$ „ SA,
gelegt ist.

b) Wird aber die Transversale so gelegt, dass der Punkt D' in die Mitte zwischen A' und B' zu liegen kommt, oder das Verhältniss $A'D' : D'B' = 1$ wird, so geht das Doppelverhältniss $(A'B'C'D')$ in $A'C' : C'B'$ über, und man hat

$(ABCD) = A'C' : C'B'$, wenn $A'D' = D'B'$ ist; ebenso
$(ABCD) = (BADC) = B'D' : D'A'$, „ $A'C' = C'B'$ ist,
$(ABCD) = (CDAB) = C'A' : A'D'$, „ $C'B' = B'D'$ ist,
$(ABCD) = (DCBA) = D'B' : B'C'$, „ $C'A' = A'D'$ ist.

Eine Transversale, auf welcher ein Abschnitt z. B. $A'B'$ durch den Strahl SD in D' halbirt wird, ist ihrer Richtung nach bestimmt, wenn man durch einen beliebigen Punkt D_1 der SD (Fig. 15) die

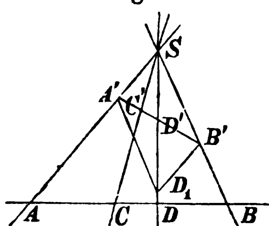


Fig. 15.

Parallelen D_1A', D_1B' zu SB und SA zieht, welche SA und SB in den Punkten A' und B' treffen. Die durch A' und B' gelegte, sowie auch jede zu derselben parallel geführte Grade entspricht dann der gestellten Forderung.

2) Desgleichen lässt sich jedes Doppelverhältniss zwischen vier Strahlen durch ein einfaches zwischen drei Strahlen wiedergeben.

Seien a, b, c, d vier Grade, welche sich in einem Punkte S schneiden und von einer beliebigen Transversale e in den Punkten A, B, C, D getroffen werden. Jede vier Strahlen a', b', c', d', welche durch einen andern Punkt S', sowie beziehlich durch dieselben Punkte A, B, C, D gelegt werden, bilden dasselbe Doppelverhältniss wie die ersteren vier Strahlen, oder es ist

$$sin\,(abcd) = sin\,(a'b'c'd').$$

Wählt man nun den Punkt S' so, dass

a) a' und b' senkrecht zu einander gerichtet sind, mithin

$$a'^{\wedge}c' + c'^{\wedge}b' = a'^{\wedge}d' + d'^{\wedge}b' = 90^0 \text{ und}$$

$$\frac{sin\,a'^{\wedge}c'}{sin\,c'^{\wedge}b'} = \frac{sin\,a'^{\wedge}c'}{cos\,a'^{\wedge}c'} = tg\,a'^{\wedge}c',$$

$$\frac{sin\,a'^{\wedge}d'}{sin\,d'^{\wedge}b'} = \frac{sin\,a'^{\wedge}d'}{cos\,a'^{\wedge}d'} = tg\,a'^{\wedge}d'$$

wird, so hat man

$$sin\,(abcd) = \qquad tg\,a'^{\wedge}c' : tg\,a'^{\wedge}d', \text{ ebenso}$$

$$sin\,(abcd) = sin\,(badc) = tg\,b'^{\wedge}d' : tg\,b'^{\wedge}c'.$$

In gleicher Weise ist

$$sin\,(abcd) = sin\,(cdab) = tg\,c'^{\wedge}a' : tg\,c'^{\wedge}b' \text{ und}$$

$$sin\,(abcd) = sin\,(dcba) = tg\,d'^{\wedge}b' : tg\,d'^{\wedge}a',$$

wenn die Strahlen c' und d' zu einander senkrecht angenommen werden.

Der Ort von S' ist in dem $\left\{\begin{matrix}\text{ersten}\\ \text{zweiten}\end{matrix}\right\}$ Falle ein Kreis über $\left\{\begin{matrix}AB\\ CD\end{matrix}\right\}$ als Durchmesser. Es ist aber leicht einzusehen, dass überhaupt jeder Punkt der Ebene ausser S der gestellten Forderung für S' gnügen kann. Denn legt man durch einen beliebig gewählten Punkt S' zwei zu einander senkrechte Grade a' und b' (c' und d'), welche die

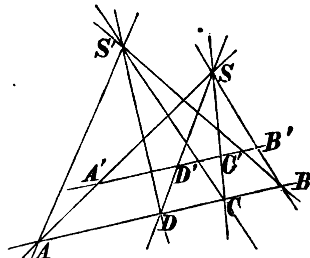
Strahlen a und b (c und d) in den Punkten A und B (C und D) schneiden — nur so, dass keiner dieser Schnittpunkte mit S zusammenfällt — zieht hierauf durch A und B (C und D) die Transversale e, welche die beiden andern Strahlen c und d (a und b) in den Punkten C und D (A und B) schneidet und zieht endlich die Graden $S'C$ oder c' und $S'D$ oder d' ($S'A$ oder a' und $S'B$ oder b'), so gnügen die drei Strahlen a', c', d' oder b', c', d' (c', a', b' oder d', a', b') den gemachten Forderungen.

b) Der Punkt S' kann auch so gewählt werden, dass $a'^{\wedge}d' = d'^{\wedge}b'$, mithin $\sin a'^{\wedge}d' : \sin d'^{\wedge}b' = 1$ wird. Damit reducirt sich das Doppelverhältniss

$\sin (abcd)$ auf das einfache $\sin a'^{\wedge}c' : \sin c'^{\wedge}b'$; ebenso
$\sin (abcd) = \sin (badc)$ auf $\sin b'^{\wedge}d' : \sin d'^{\wedge}a'$, wenn $b'^{\wedge}c' = c'^{\wedge}a'$,
$\sin (abcd) = \sin (cdab)$ „ $\sin c'^{\wedge}a' : \sin a'^{\wedge}d'$ „ $c'^{\wedge}b' = b'^{\wedge}d'$,
$\sin (abcd) = \sin (dcba)$ „ $\sin d'^{\wedge}b' : \sin b'^{\wedge}c'$ „ $d'^{\wedge}a' = a'^{\wedge}c'$.

Dass man durch jedem Punkt S' der Ebene vier Strahlen a', b', c', d' legen kann, deren Doppelverhältniss $\sin (a'b'c'd')$ sich auf ein einfaches z. B. auf $\sin a'^{\wedge}c' : \sin c'^{\wedge}b'$ reducirt und dem gegebenen Doppelverhältnisse $\sin (abcd)$ von vier andern Strahlen gleich ist, lässt sich leicht darthun. Zieht man nämlich (Fig. 16) durch einen beliebigen Punkt D' des Strahles d eine Transversale so, dass D' den Abschnitt $A'B'$ derselben, welcher zwischen den Strahlen a und b liegt, halbirt, legt durch S' eine Senkrechte zu $A'B'$, welche d in dem Punkte D trifft, dann durch D eine Parallele zu $A'B'$, welche die Strahlen a, b, c in A, B, C schneidet und zieht $S'A$, $S'B$, $S'C$; so bilden diese mit SD das geforderte Strahlenbüschel a', b', c', d', für welches $\sin (a'b'c'd') = \sin a'^{\wedge}c' : \sin c'^{\wedge}b' = \sin (abcd)$ ist.

Fig. 16.



3) Umgekehrt kann jedes einfache Verhältniss zwischen drei Punkten A', B', C' einer Graden durch ein Doppelverhältniss zwischen vier anderen Punkten A, B, C, D einer andern Graden wiedergegeben werden.

Denn ist D' der unendlich ferne Punkt der Graden $A'B'$, so wird das Doppelverhältniss $(A'B'C'D')$, welches sich auf das einfache $A'C' : B'C'$ reducirt, immer dem Doppelverhältnisse $(ABCD)$ gleichgesetzt werden können, wenn nur die Punkte des letzteren nach

§. 36 denen des ersteren entsprechend angenommen werden, was auf unendlich vielfache Weise möglich ist.

Hiernach lässt sich überhaupt jede Funktion, die nur aus einfachen Verhältnissen zwischen Punkten einer Graden — einschliesslich einer oder mehrerer Constanten — zusammengesetzt ist, in dieselbe Funktion von Doppelverhältnissen zwischen Punkten einer Graden umsetzen.

Z. B. I. zwischen drei Punkten A', B, C' einer Graden hat man die Relation

$$A'B' + B'C' + C'A' = 0 \text{ oder}$$
$$\frac{A'B'}{B'C'} + \frac{A'C'}{C'B'} = -1.$$

Bezeichnet nun D' den unendlich fernen Punkt der Graden $A'B'$, so ist, weil $A'D' : D'C' = -1$ und ebenso $A'D' : D'B' = -1$ ist, auch

$$\frac{A'B'}{B'C'} : \frac{A'D'}{D'C'} + \frac{A'C'}{C'B'} : \frac{A'D'}{D'B'} = 1.$$

Dieselbe Relation von Doppelverhältnissen gilt offenbar auch von den gleichgebildeten der Punkte A, B, C, D einer andern Graden, wenn beide Systeme von Punkten nach §. 36 sich entsprechen, wobei im Allgemeinen keiner der Punkte A, B, C, D ein unendlich entfernter ist. Diese somit erhaltene allgemeine Relation von Doppelverhältnissen entspricht übrigens der oben §. 7 bemerkten Beziehung und ist gleichbedeutend mit der unter §. 27 II. aufgestellten.

II. Zwischen vier Punkten A, B, C, D einer Graden gilt die allgemeine Beziehung (§. 8)

$$\frac{DA^2}{AB \,.\, AC} + \frac{DB^2}{BC \,.\, BA} + \frac{DC^2}{CA \,.\, CB} = 1.$$

Bezeichnet man mit E den unendlich fernen Punkt der Graden, löst jedes Glied auf der linken Seite vorstehender Gleichung in ein Product zweier einfachen Verhältnisse auf und setzt mit Hilfe von E jedes dieser Verhältnisse in ein Doppelverhältniss um, so erhält man

$$\left(\frac{DA}{AC} : \frac{DE}{EC}\right)\left(\frac{DA}{AB} : \frac{DE}{EB}\right) + \left(\frac{DB}{BA} : \frac{DE}{EA}\right)\left(\frac{DB}{BC} : \frac{DE}{EC}\right)$$
$$+ \left(\frac{DC}{CB} : \frac{DE}{EB}\right)\left(\frac{DC}{CA} : \frac{DE}{EA}\right) = -1,$$

oder

$$(DACE)\,(DBCE) + (DBAE)\,(DCAE) + (DCBE)\,(DABE) = -1.$$

Diese Gleichung muss nun, weil in ihr nur Doppelverhältnisse und eine Constante vorkommen, auch gelten, wenn E nicht mehr der unendlich ferne, sondern ein beliebiger Punkt einer Graden ist. Sie lässt sich übrigens noch in folgende Form bringen:

$$AD^2.BC.CE.EB + BD^2.CA.AE.EC + CD^2.AB.BE.EA + DE^2.AB.BC.CA = 0,$$

oder mit Vertauschung der Buchstaben D und E,

$$EA^2.BC.CD.DB + EB^2.CD.DA.AC + EC^2.DA.AB.BD + ED^2.AB.BC.CA = 0:$$

welche somit eine allgemeine Gleichung zwischen fünf beliebigen Punkten einer Graden ist.

4) Enthält ein Ausdruck zwischen Punkten einer Graden nur Doppelverhältnisse und Constante, so kann man nach §. 35 und 36 ohne Weiteres von demselben auf den gleichgebildeten Ausdruck von Doppelverhältnissen zwischen ebenso vielen Graden eines Strahlbüschels übergehen. So geben z. B. die in voriger Nummer unter I. und II. entwickelten Beziehungen auch sofort

$$\sin(acbd) + \sin(abcd) = 1,$$

oder $$\sin a^\wedge b \sin c^\wedge d + \sin b^\wedge c \,.\, \sin a^\wedge d + \sin c^\wedge a \sin b^\wedge d = 0;$$

und

$$\sin(dace)\sin(dbce) + \sin(dbae)\sin(dcae) + \sin(dcbe)\sin(dabe) = -1,$$

oder

$$\sin^2 a^\wedge d \sin b^\wedge c \,.\, \sin c^\wedge e \sin e^\wedge b + \sin^2 b^\wedge d \sin c^\wedge a \sin a^\wedge e \sin e^\wedge c + \sin^2 c^\wedge d \sin a^\wedge b \sin b^\wedge e \sin e^\wedge a + \sin^2 d^\wedge e \sin a^\wedge b \sin b^\wedge c \sin c^\wedge a = 0.$$

§. 41.

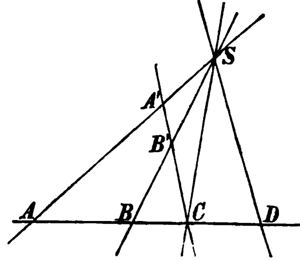
Construction des vierten Punktes oder Strahles zu drei gegebenen eines Doppelverhältnisses. Sind von vier Punkten einer Graden drei gegeben, so ist, wie schon früher bemerkt, mit dem Werthe des Doppelverhältnisses auch der vierte bestimmt; dasselbe gilt auch bezüglich des Doppelverhältnisses zwischen vier Strahlen. Die Sätze der vorhergehenden Nummer lassen sich zur Lösung der Aufgabe benutzen, zu drei Punkten oder Strahlen den vierten durch Construction zu bestimmen, wenn das Doppelverhältniss zwischen den vier Elementen gegeben ist.

1) Seien von vier Punkten A, B, C, D einer Graden das Doppelverhältniss $(ABCD) = \lambda$, sowie die Lage der drei ersten A, C, D gegeben.

a) Man ziehe durch den dritten (durch den zum gesuchten D

zugeordneten) Punkt C (Fig. 17) eine beliebige Transversale und trage auf derselben von C aus zwei Strecken CA' und CB' ab, deren Verhältniss $CA' : CB'$ gleich dem gegebenen Werthe $\lambda : 1$ des Doppelverhältnisses ist und deren Richtungen von C aus gleich oder entgegengesetzt sind, je nachdem λ ein positiver oder negativer Werth ist. Man verbinde dann A mit A' und B mit B' durch Grade, und durch den Schneidepunkt S derselben eine Parallele zu $A'B'$, welche die AB in dem gesuchten Punkte D schneidet.

Fig. 17.



Zieht man nämlich noch SC, so sind SA, SB, SC, SD vier Grade, welche die beiden Transversalen AB und $A'B'$ in entsprechenden Punkten A, B, C, D und A', B', C, D' schneiden, deren Doppelverhältnisse folglich einander gleich sind. Wegen des Parallelismus von SD mit $A'B'$ ist aber D' der unendlich entfernte Punkt der Graden $A'B'$ und das Doppelverhältniss $(A'B'CD')$ reducirt sich auf das einfache $CA' : CB'$. (§. 40 a.) Somit ergiebt sich

$$(ABCD) = CA' : CB' = \lambda : 1.$$

Es müssen daher auch CA' und CB' gleiche oder entgegengesetzte Richtung haben, je nachdem λ positiv oder negativ ist.

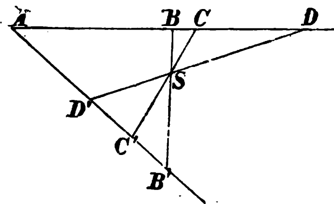
Ist von den vier Punkten, welche das Doppelverhältniss $(ABCD) = \lambda$ bilden, ein anderer z. B. B der gesuchte, so kann man denselben nach §. 27 immer als den letzten im symbolischen Ausdrucke darstellen, indem auch

$$(ABCD) = (CDAB) = \lambda$$

ist. Es tritt dann der zu B zugeordnete Punkt A an die Stelle von C des vorhergehenden Falles, durch diesen ist dann die Transversale zu ziehen u. s. w.

b) Man lege durch den ersten Punkt A (Fig. 18) eine beliebige Transversale und trage auf derselben von A aus zwei Abschnitte AC', $C'B'$, die sich $= \lambda : 1$ verhalten, hintereinander in gleicher oder entgegengesetzter Richtung ab, jenachdem das Verhält-

Fig. 18.



niss λ positiv oder negativ ist. Man halbire dann AB' in D' und ziehe die Graden CC' und BB', die sich in S schneiden, so wird die Grade durch S und D', die AB in dem gesuchten Punkte D treffen. Denn nach §. 35 ist

$$(ABCD) = (AB'C'D')$$

und weil $AD' = D'B'$, $(AB'C'D') = AC' : C'B' = \lambda$,

mithin $(ABCD) = \lambda$.

2) Sind a, b, c, d vier Strahlen, welche sich in dem gemeinschaftlichen Punkte S schneiden, und sind ausser dem Doppelverhältniss $\sin(abcd) = \lambda$ drei derselben a, b, c ihrer Richtung nach gegeben, so lässt sich der vierte d einfach dadurch bestimmen, dass man eine beliebige Transversale zieht, welche die gegebenen Strahlen in den Punkten A, B, C schneide. Zu diesen dreien sucht man auf der Transversale einen vierten D von der Beschaffenheit, dass

$$(ABCD) = \sin(abcd) = \lambda$$

ist und zieht durch D und S eine Grade SD oder d.

Drittes Capitel.

Das harmonische Verhältniss.

---

§. 42.

Erklärung. Wenn das Doppelverhältniss $(ABCD)$ zwischen vier Punkten einer Graden den besondern Werth -1 hat, so heissen die vier Punkte A, B, C, D harmonische Punkte und das Doppelverhältniss ein harmonisches Verhältniss.

Fig. 19.



Man bezeichnet in diesem Falle die Strecke AB als eine in den Punkten C und D harmonisch getheilte; weil aber $(ABCD) = (CDAB)$ ist, kann man auch sagen, dass die Strecke CD in den Punkten A und B harmonisch getheilt ist. Dieser gleichmässigen Beziehung wegen werden sowohl die Punkte A und B als auch C und D einander zugeordnete oder conjugirte Punkte genannt.

Das Doppelverhältniss

$$(ABCD) = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = -1$$

wird als ein harmonisches Verhältniss bezeichnet, weil es mit der harmonischen Theilung einer Graden nach der gewöhnlichen Definition übereinstimmt, wenn übrigens die Abschnitte absolut genommen werden.

Anmerkung. Drei Grössen stehen in stetiger harmonischer Proportion, wenn die Differenz der ersten und zweiten Grösse zur Differenz der zweiten und dritten sich verhält, wie die erste zur dritten. Sind also A, B, C, D vier hintereinander folgende Punkte einer Graden, so bilden die drei Abschnitte AC, AB, AD eine harmonische Proportion, wenn

$$AB - AC : AD - AB = AC : AD,$$

d. i.
$$CB : BD = AC : AD,$$

oder
$$AC : CB = AD : BD.$$

Hieraus folgt

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{BD} = 1,$$

daher
$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} \text{ oder } (ABCD) = -1.$$

Nimmt man auf die Richtungen und Vorzeichen der Abschnitte keine Rücksicht, so sagt man, die Linie *AD* ist in *B* und *C* harmonisch getheilt, wenn von den drei Abschnitten *AB*, *BC*, *CD* der mittlere zu einem der beiden äussern sich verhält, wie der andere äussere zu der ganzen Linie, oder wenn das Product aus den beiden äussern Abschnitten gleich dem aus der ganzen Linie und dem mittlern Abschnitte ist.

§. 43.

Theilung eines Abschnitts nach einerlei Verhältniss. Wird eine Strecke *AB* in zwei Punkten *C* und *D* nach einerlei, übrigens beliebigem, aber entgegengesetztem Verhältnisse $\frac{m}{n}$ und $-\frac{m}{n}$ geschnitten, so ist sie in den beiden Punkten *C* und *D* harmonisch getheilt. Denn ist

$$\frac{AC}{CB} = \frac{m}{n} \text{ und } \frac{AD}{DB} = -\frac{m}{n},$$

so ist

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = -1.$$

§. 44.

Zusätze. 1) Nach §. 27 ist, wenn $(ABCD) = -1$ ist, auch

$$(ABDC) = (BACD) = (BADC) = -1;$$

ebenso

$$(CDAB) = (CDBA) = (DCAB) = (DCBA) = -1.$$

2) Wenn das Doppelverhältniss (*ABCD*) ein harmonisches ist, also einen negativen Werth hat, so muss von den beiden Schneidepunkten *C*, *D* der Strecke *AB* der eine ein innerer, der andere ein äusserer sein; in gleicher Weise muss von den beiden Schneidepunkten *A*, *B* der Strecke *CD* der eine ein innerer, der andere ein äusserer sein (§. 26).

3) Ist von den vier Punkten A, B, C, D einer Graden, welche das harmonische Verhältniss $(ABCD) = -1$ bilden, C die Mitte der Strecke AB, oder $AC : CB = 1$, so ist $AD : DB = -1$, folglich D der unendlich ferne Punkt der Graden (§. 26), und umgekehrt: der harmonisch zugeordnete Punkt C des unendlich fernen D der Graden ist der Mittelpunkt des Abschnitts der beiden andern Punkte A und B.

4) Ist dagegen C irgend ein anderer innerer Punkt von AB, so liegt der äussere Punkt D auf der Verlängerung von AB oder von BA, je nachdem AC grösser oder kleiner als CB ist. Oder liegt C näher am Endpunkte A (B) des Abschnitts als an B (A), so befindet sich D auf der zur Seite von A (B) liegenden Verlängerung des Abschnitts.

5) Sind also A und B, C und D zugeordnete harmonische Punkte, so liegt die Mitte je zweier zugeordneter Punkte immer ausserhalb der Strecke, welche die beiden andern zugeordneten Punkte begrenzen.

6) Ist die Strecke AB (Fig. 20) in C und D, in C' und D', in C'' und D'' harmonisch getheilt, und liegen sowohl C als C' näher an A als an B, befinden sich also beide zugeordnete Punkte D und D' auf der Verlängerung von BA (4), so liegt D näher an A als D', wenn auch C näher an A als C' liegt. Denn ist

Fig. 20.



$$AC < AC',$$

so ist auch

$$\frac{AC}{CB} < \frac{AC'}{C'B}$$

und weil

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = \frac{AC'}{C'B} : \frac{AD'}{D'B}$$

auch (absolut genommen)

$$\frac{AD}{DB} < \frac{AD'}{D'B},$$

folglich (absolut)

$$AD < AD'.$$

Eine der beiden zwischen je zwei zugeordneten Punkten liegenden Strecken CD, $C'D'$ liegt daher ganz auf der andern. Liegt aber einer der zugeordneten Punkte z. B. C'' näher an B als an A, so

liegt der andere D'' auf der Verlängerung von AB und die Strecke $C'D''$ liegt ganz ausserhalb der Strecken CD oder $C'D'$.

Ist daher eine Strecke auf zwei verschiedene Weisen harmonisch getheilt, so haben die beiden zwischen je zwei zugeordneten Punkten liegenden Streken entweder gar keinen Abschnitt mit einander gemein, oder die eine Strecke liegt ganz auf der andern, d. h. wird von derselben eingeschlossen; niemals aber kann eine Strecke nur theilweis auf der andern liegen.

Liegen somit zwei Abschnitte CD, $C'D'$ einer Graden theilweise übereinander, wie in Fig. 21, so lassen sich dazu nicht zwei Punkte A und B bestimmen, welche sowohl zu C und D als auch zu C' und D' zugeordnete harmonische Punkte wären. (M. s. u. §. 59.)

Fig. 21.

$C \qquad C' \quad D \qquad D'$

§. 45.

Erklärung. Ist der Werth des Doppelverhältnisses $\sin(abcd)$ zwischen vier Graden, welche in einem Punkte zusammentreffen, gleich -1, so bilden die Graden ein harmonisches Strahlenbüschel; a und b sowie c und d nennt man einander zugeordnete oder conjugirte Strahlen. Auch sagt man, dass c und d den Winkel $a^\wedge b$ harmonisch theilen, wie auch a und b den Winkel $c^\wedge d$ harmonisch theilen. Von allen vier Strahlen gebraucht man nicht selten die Bezeichnung Harmonikalen.

Aus dieser Erklärung, sowie aus §. 34 und 35 geht hervor, dass auch bei vier Harmonikalen a, b, c, d stets

$$\sin(abcd) = \sin(abdc) = \sin(bacd) = \text{etc.} = -1$$

ist, oder dass §. 44 1) und 2) unmittelbar auf vier Harmonikalen übertragen werden kann.

§. 46.

Harmonische Lage von vier Strahlen in besondern Fällen. Nach §. 35 schneiden vier Harmonikalen a, b, c, d jede beliebige Transversale in vier harmonischen Punkten A, B, C, D oder es ist

$$\sin(abcd) = (ABCD) = -1.$$

Wird die Transversale einer der Harmonikalen z. B. d parallel

geführt, so fällt deren Durchschnittspunkt C mit der zugeordneten Harmonikale c in die Mitte zwischen die Durchschnittspunkte mit den beiden andern Harmonikalen a und b. (§. 44 3.)

Hieraus folgt: 1) Sind vier Strahlen eines Büschels den Seiten und Diagonalen eines Parallelogramms parallel, so ist das Büschel ein harmonisches, in welchem die den Diagonalen parallel liegenden, sowie die den Seiten parallel liegenden Strahlen einander zugeordnet sind.

Stehen ausserdem noch die beiden zugeordneten Strahlen c und d auf einander rechtwinklig (ist das eben erwähnte Parallelogramm ein Rhombus), so sind die Winkel $a^\wedge c$ und $c^\wedge b$ einander gleich, d. h.

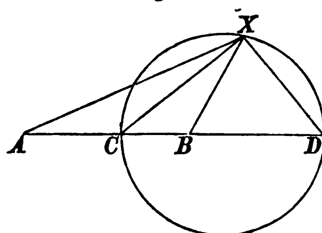
2) Wenn von vier Harmonikalen zwei zugeordnete einen rechten Winkel einschliessen, so ist eine derselben die Halbirungslinie des Winkels, welchen die beiden andern Harmonikalen bilden.

Damit sind auch folgende Sätze erwiesen:

3) Wird in einem Dreieck ein innerer Winkel, sowie der äussere Nebenwinkel halbirt, so theilen beide Halbirungslinien die gegenüberliegende Seite harmonisch. Oder die Halbirungslinie eines Winkels und die Senkrechte zu derselben (die Halbirungslinie seines Nebenwinkels) theilen die Winkel harmonisch.

4) Wird der Durchmesser CD (Fig. 22) eines Kreises in zwei Punkten A und B harmonisch getheilt, und zieht man nach denselben von einem beliebigen Punkte X des Kreisumfangs zwei Grade, XA, XB, so wird der Winkel derselben AXB durch diejenige Grade XC halbirt, welche von demselben Punkte X des Kreisumfangs nach dem zwischen A und B liegenden Endpunkte C des Durchmessers gezogen ist.

Fig. 22.



4) Da unter der Voraussetzung, dass die Winkel AXB und CXB einander gleich sind, bekanntlich $AC : CB = AX : BX$ ist, so folgt:

Der geometrische Ort der Spitzen X aller Dreiecke

über einer gemeinsamen Grundlinie AB, deren beide andern Seiten AX, XB ein constantes Verhältniss $m:n$ haben, ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt in der verlängerten Grundlinie liegt und dessen Durchmesser dem Abstand der beiden Punkte C und D gleichkommt, in welchen die Grundlinie AB nach dem constanten Verhältnisse $m:n$ harmonisch getheilt wird.

§. 47.

Metrische Verhältnisse bei vier harmonischen Punkten oder Strahlen. Sind A, B, C, D vier harmonische Punkte einer Graden und a, b, c, d vier Harmonikalen, so ist (§. 28, 34)

$$(ABCD) = -1; \quad (ACDB) = \tfrac{1}{2}; \quad (ADBC) = 2;$$

d. h. wenn man diese Doppelverhältnisse in der gewöhnlichen Weise schreibt, ist

$$\text{I.} \qquad \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = -1,$$

so ist auch

$$\text{II.} \qquad \begin{cases} AB \,.\, CD = 2 AC \,.\, BD, \\ BA \,.\, CD = 2 BC \,.\, AD. \end{cases}$$

Ebenso folgt bei vier Harmonikalen a, b, c, d aus

$$\text{Ib.} \qquad \frac{\sin a^\wedge c}{\sin c^\wedge b} : \frac{\sin a^\wedge d}{\sin d^\wedge b} = -1$$

$$\text{IIb.} \qquad \begin{cases} \sin a^\wedge b \,.\, \sin c^\wedge d = 2 \sin a^\wedge c \,.\, \sin b^\wedge d \\ \sin b^\wedge a \,.\, \sin c^\wedge d = 2 \sin b^\wedge c \,.\, \sin a^\wedge d. \end{cases}$$

Die Beziehung II. (ebenso IIb.) lässt sich auch in folgender Weise ableiten. Setzt man in der allgemeinen Gleichung für vier Punkte einer Graden (§. 7)

$$AB \,.\, CD + BC \,.\, AD + CA \,.\, BD = 0$$

voraus, dass zwei dieser Producte z. B. $BC.AD$ und $CA.BD$ gleiche Werthe haben, so folgt aus

$$BC \,.\, AD = CA \,.\, BD$$

sofort

$$\text{I.} \qquad \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = -1,$$

d. h. die vier Punkte A, B, C, D sind harmonische. Sodann hat man in Folge derselben Voraussetzung auch

$$\text{II.} \quad \begin{cases} AB \,.\, CD = 2AC \,.\, BD, \text{ oder} \\ BA \,.\, CD = 2BC \,.\, AD \end{cases}$$

§. 48.

Andere Ausdrücke für das harmonische Verhältniss. Nach §. 39 folgt für vier harmonische Punkte A, B, C, D aus $(ABCD) = -1$

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{BC} = -\left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{BD}\right)$$

oder

$$\text{III.} \quad \begin{cases} \frac{2}{BA} = \frac{1}{BC} + \frac{1}{BD}, \text{ ebenso} \\ \frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}; \\ \frac{2}{CD} = \frac{1}{CA} + \frac{1}{CB}, \\ \frac{2}{DC} = \frac{1}{DA} + \frac{1}{DB} {}^{*)}, \end{cases}$$

d. h. der reciproke Werth der Entfernung eines Punktes von seinem harmonisch zugeordneten ist das arithmetische Mittel der reciproken Entfernungen desselben Punktes von den beiden andern harmonischen Punkten.

Desgleichen ergiebt sich für vier Harmonikalen a, b, c, d

$$\text{IIIb.} \quad \begin{cases} \frac{2}{tg\, a^\wedge b} = \frac{1}{tg\, a^\wedge c} + \frac{1}{tg\, a^\wedge d} \\ \frac{2}{tg\, c^\wedge d} = \frac{1}{tg\, c^\wedge a} + \frac{1}{tg\, c^\wedge b} \text{ u. s. w.} \end{cases}$$

Bemerkung. Wählt man zu mehreren Punkten A, B, C, D... einer Graden einen Punkt M in derselben von der Beschaffenheit, dass der reciproke Werth seiner Entfernung von einem gewissen Punkte O der Graden des arithmetische Mittel zwischen den reciproken Werthen der Entfernungen

---

*) Jede dieser Gleichungen drückt auch den bekannten Satz aus: Drei Grössen stehen in einer stetigen harmonischen Proportion, wenn ihre Reciproken eine stetige arithmetische Proportion bilden.

der Punkte A, B, C, D... von demselben Punkte O, ist, d. h. dass man hat

$$\frac{n}{OM}=\frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}+\frac{1}{OC}+\frac{1}{OD}+\cdots$$

wenn n die Zahl der Punkte A, B, C, D... ist, so nennt man nach Maclaurin OM das harmonische Mittel der Entfernungen OA, OB, OC etc. oder nach Poncelet den Punkt M den harmonischen Mittelpunkt der Punkte A, B, C...

Diesen Erklärungen gemäss kann vorstehender Satz auch folgende Fassung erhalten: Bei vier harmonischen Punkten ist die Entfernung eines derselben von seinem zugeordneten das harmonische Mittel der Entfernungen desselben Punktes von den beiden andern Punkten. Oder jeder der Punkte ist in Beziehung auf seinen zugeordneten der harmonische Mittelpunkt der beiden andern Punkte.

§. 49.

Ausdrücke und Relationen unter Zuziehung eines beliebigen fünften Punktes. Bezieht man vier harmonische Punkte A, B, C, D einer Graden auf einen beliebigen fünften Q derselben Graden, so folgen aus §. 39, 2) die Beziehungen

$$\text{IV.}\quad \left\{\begin{aligned} 2\frac{QA}{AB}&=\frac{QC}{CB}+\frac{QD}{DB},\\ 2\frac{QB}{BA}&=\frac{QC}{CA}+\frac{QD}{DA},\\ 2\frac{QC}{CD}&=\frac{QA}{AD}+\frac{QB}{BD},\\ 2\frac{QD}{DC}&=\frac{QA}{AC}+\frac{QB}{BC},\end{aligned}\right.$$

In ähnlicher Weise ergiebt sich für vier Harmonikalen a, b, c, d und eine fünfte durch den gemeinsamen Durchschnittspunkt derselben beliebig gelegte Grade q aus 39, 3

$$\text{IVb.}\quad \left\{\begin{aligned} 2\frac{\sin q^\wedge a}{\sin a^\wedge b}&=\frac{\sin q^\wedge c}{\sin c^\wedge b}+\frac{\sin q^\wedge d}{\sin d^\wedge b},\\ 2\frac{\sin q^\wedge c}{\sin c^\wedge d}&=\frac{\sin q^\wedge a}{\sin a^\wedge d}+\frac{\sin q^\wedge b}{\sin b^\wedge d},\quad \text{u. s. w.}\end{aligned}\right.$$

Jede der unter I., II., III., IV. bemerkten Gleichungen drücken gleichmässig das harmonische Verhältniss von vier Punkten einer Graden, sowie die unter Ib., IIb., IIIb., IVb. aufgeführten das harmonische Verhältniss zwischen vier Strahlen aus.

§. 50.

Drückt man die Abschnitte, welche in dem Ausdrucke des Doppelverhältnisses zwischen vier harmonischen Punkten A, B, C, D vorkommen, durch die Entfernungen der Punkte von einem beliebigen fünften Punkte Q nach §. 3 aus, so erhält man zunächst aus

$$\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}$$

$$\frac{QC-QA}{QB-QC} = -\frac{QD-QA}{QB-QD}, \text{ oder}$$

V. $(QA+QB)(QC+QD) = 2QA.QB+2QC.QD.$

Diese Gleichung lässt sich auch schreiben

$$QA(QC-QB)+QB(QD-QA)+QC(QB-QD) + QD(QA-QC) = 0,$$

oder

VI. $\begin{cases} QA.BC+QB.AD+QC.DB+QD.CA=0, \\ \text{ebenso findet man} \\ QA.BD+QB.AC+QC.DA+QD.CB=0. \end{cases}$

Ist M die Mitte von AB, N die Mitte von CD, also $QA+QB = 2QM$ und $QC+QD=2QN$, so geht die Gleichung V. über in

VII. $2QM.QN = QA.QB+QC.QD.$

Verbindet man diese Gleichung mit den beiden folgenden identischen

$$QC^2+QC.QD = 2QC.QN,$$
$$QD^2+QD.QC = 2QD.QN,$$

indem man diese drei der Reihe nach mit CD, DM, MC multiplicirt und hierauf addirt, so erhält man zunächst

$$QA.QB.CD+QC^2.DM+QD^2MC+QC.QD(CD+DM+MC) = 2QN(CD.QM+DM.QC+MC.QD);$$

weil aber für die drei Punkte C, D, M immer

$$CD+DM+MC=0,$$

ebenso für die vier Punkte C, D, M, Q nach §. 7

$$CD.QM+DM.QC+MC.QD=0$$

ist, so reducirt sich letztere Gleichung auf

VIII. $\begin{cases} QA.QB.CD+QC^2.DM+QD^2.MC=0; \\ \text{ebenso erhält man} \\ QC.QD.AB+QA^2.BN+QB^2.NA=0. \end{cases}$

Setzt man in der ersten dieser beiden Gleichungen $DC+CM$ für DM, so geht diese über in

$$QA . QB . CD + QC^2 . DC + (QD^2 - QC^2)\, MC = 0,$$

oder weil $QD^2 - QC^2 = (QD + QC)(QD - QC)$ und $QD + QC = 2\,QN$, $QD - QC = CD$ ist,

$$QA . QB . CD + QC^2 . DC + 2\,QN . CD . MC = 0$$

und nach Division durch CD

$$\text{IX.} \qquad QA . QB - QC^2 + 2\,QN . MC = 0.$$

In gleicher Weise findet man, wenn anfänglich $MD + DC$ für MC gesetzt wird,

$$QA . QB - QD^2 + 2\,QN . MD = 0;$$

und ebenso erhält man aus der zweiten Gleichung von VIII. die den vorhergehenden entsprechenden

$$QC . QD - QA^2 + 2\,QM . NA = 0$$
$$QC . QD - QB^2 + 2\,QM . NB = 0.$$

In allen den Gleichungen von V.—IX. ist Q irgend ein beliebiger Punkt; giebt man demselben eine bestimmtere Lage oder Beziehung zu den harmonischen Punkten A, B, C, D, so ergeben sich daraus einfachere, zum Theil sehr bekannte Sätze.

§. 51.

Besondere Gleichungen zu gewissen Lagen von Q gehörig. Lässt man den Punkt Q einmal mit N und dann mit M zusammenfallen, so geben die Gleichungen unter IX.

$$\text{X.} \qquad \begin{cases} NA . NB = NC^2 = ND^2 \\ MC . MD = MA^2 = MB^2, \end{cases}$$

d. h. halbirt man den Abschnitt zwischen zwei zugeordneten Punkten, so ist das Quadrat dieser Hälfte gleich dem Product aus den Entfernungen des Halbirungspunktes von den beiden andern zugeordneten Punkten.

Soll in den vorstehenden Gleichungen den Quadraten ein positives Vorzeichen, oder den Grössen NC, ND, MA, MB ein reeller Werth zukommen, so müssen die Abschnitte NA und NB einerlei Richtung von N aus, ebenso MC, MD von M aus haben, d. h. N muss für die Strecke AB ein äusserer Punkt, desgleichen M für CD sein, was mit dem schon in §. 44, 5 Bemerkten übereinkommt.

Es ist daher leicht ersichtlich, dass bei gehöriger Berücksichti-

gung des Princips der Zeichen die Gleichungen X. oder der zugehörige Satz auch umgekehrt ihre allgemeine Geltung haben.*)

Nach (4) in §. 5 ist $NA \,.\, NB = NM^2 - MA^2$, folglich nach X.

$$NC^2 = NM^2 - MA^2$$

$$\text{und } MA^2 + NC^2 = NM^2$$

oder, wenn man mit 4 multiplicirt und bedenkt, dass nach 5) in §. 6 $2\,MN = AC + BD = AD + BC$ ist,

XI. $$AB^2 + CD^2 = (AC + BD)^2 = (AD + BC)^2.$$

d. h. Die Quadratsumme der Entfernungen je zweier zugeordneten Punkte ist gleich dem Quadrate der Summe derjenigen Abschnitte, welche von je zwei nicht zugeordneten Punkten begrenzt werden.

Die Gleichungen X. u. XI. lassen sich auch aus VII. ableiten, wenn man für diese den Punkt Q mit M oder N zusammenfallen lässt. Man erhält dann

$$MA \,.\, MB + MC \,.\, MD = NA \,.\, NB + NC \,.\, ND = 0,$$

oder weil $MB = -MA$, $ND = -NC$ ist,

$$MA^2 = MC \,.\, MD, \quad NC^2 = NA \,.\, NB,$$

wie oben.

Ohne Zuhilfenahme eines beliebigen Punktes Q ergiebt sich dieselbe Relation noch in nachstehender Weise. Führt man in der Gleichung $(ABCD) = -1$, oder

(I.) $$AC \,.\, DB = CB \,.\, DA$$

den Mittelpunkt M des Abschnittes AB ein, für den man die Transformationsgleichungen

$$MA + MB = 0 \text{ oder } MB = -MA,$$

ferner $$AC = MC - MA = MC + MB, \; DB = MB - MD,$$

$$CB = MB - MC, \; DA = MA - MD = -(MB + MD)$$

hat, so geht (I.) nach Einsetzung dieser Werthe von AC, DB etc. über in $$MC \,.\, MD = MB^2 = MA^2.$$

§. 52.

Lässt man in den beiden Gleichungen VIII. den Punkt Q erst mit C oder D, dann mit A oder B zusammenfallen, so ergiebt sich nach Weglassung des gemeinschaftlichen Faktors CD und AB,

*) Adams („Die harmonischen Verhältnisse etc." S. 15) sieht sich bei Umkehrung des genannten Satzes genöthigt, den Fall, wo die Mitte zweier conjugirter Punkte zwischen den beiden andern conjugirten Punkten liegt, als Ausnahmefall zu bezeichnen, weil er keinen Unterschied zwischen AB und BA festgestellt hat.

$$\text{XII.} \quad \begin{cases} CA \,.\, CB = CD \,.\, CM, \text{ oder } DA \,.\, DB = DC \,.\, DM, \\ AC \,.\, AD = AB \,.\, AN, \text{ oder } BC \,.\, BD = BA \,.\, BN, \end{cases}$$

Nach den Erklärungen in §. 48 ist CD das harmonische Mittel der Abstände des Punktes C von A und B, sowie CM das arithmetische Mittel derselben Abstände CA und CB ist; die Gleichungen XII. besagen also:

Das Product der Abstände zweier Punkte einer Graden von einem gemeinsamen dritten in derselben Graden ist gleich dem Product aus dem harmonischen und arithmetischen Mittel derselben Abstände.

Die Gleichungen XII. können übrigens unmittelbar auch aus den unter III. in §. 48 aufgeführten abgeleitet oder auch mit denselben als gleichbedeutend aufgefasst werden. In der That folgt z. B. aus der dritten der angezogenen Gleichungen

$$\frac{2}{CD} = \frac{1}{CA} + \frac{1}{CB},$$

$$CA \,.\, CB = CD \,.\, \frac{CA + CB}{2},$$

oder, da

$$\frac{CA + CB}{2} = CM,$$

$$CA \,.\, CB = CD \,.\, CM.$$

Noch eine andere unmittelbare Ableitung ist folgende: Aus $(ABCD) = -1$ folgt $(ADCB) = \frac{1}{2}$ oder $AC : CD = \frac{1}{2}\, AB : BD$, und weil $AM = \frac{1}{2} AB$,

$$AC \,.\, BD = AM \,.\, CD,$$

oder

$$AC \,.\, (BC + CD) = AM \,.\, CD,$$

$$AC \,.\, BC = CD\,(AM - AC),$$

$$AC \,.\, BC = CD \,.\, CM.$$

§. 53.

Lässt man in der ersten der Gleichungen VIII. Q mit A oder B, in der zweiten Q mit C oder D zusammenfallen, so erhält man

$$\text{XIII.} \quad \begin{cases} \left(\frac{AC}{AD}\right)^2 = \left(\frac{BC}{BD}\right)^2 = \frac{MC}{MD}, \\ \left(\frac{CA}{CB}\right)^2 = \left(\frac{DA}{DB}\right)^2 = \frac{NA}{NB}. \end{cases}$$

Verbindet man mit diesen Gleichungen die unter X. aufgestellten, so giebt dies

$$\left(\frac{AC}{MA}\right)^2=\left(\frac{MC}{MA}\right)^2=\left(\frac{MA}{MD}\right)^2.$$

oder

XIV. $$\frac{AC}{AD}=-\frac{MC}{MA}=-\frac{MA}{MD}.$$

Bezüglich des Zeichens — auf der rechten Seite dieser Gleichungen vergl. §. 44, 5.

§. 54.

Ausdrücke unter Zuziehung zweier beliebiger Punkte. 1) Die erste der Gleichungen VI. lässt sich in folgende Form bringen

$$-\frac{AQ}{QD}\cdot\frac{BC}{CA}-\frac{BQ}{QD}\cdot\frac{DA}{AC}+\frac{QC}{CA}\cdot\frac{BD}{DQ}+1=0.$$

Bezeichnet man mit Q' den unendlich fernen Punkt der Graden, so ist nach §. 40, 3. auch

$$-\left(\frac{AQ}{QD}:\frac{AQ'}{Q'D}\right)\left(\frac{BC}{CA}:\frac{BQ'}{Q'A}\right)-\left(\frac{BQ}{QD}:\frac{BQ'}{Q'D}\right)\left(\frac{DA}{AC}:\frac{DQ'}{Q'C}\right)$$
$$+\left(\frac{QC}{CA}:\frac{QQ'}{Q'A}\right)\left(\frac{BD}{DQ}:\frac{BQ'}{Q'Q}\right)+1=0.$$

Weil aber in diesem Ausdrucke nur Doppelverhältnisse und constante Grössen vorkommen, so gilt er auch, wenn Q' irgend ein beliebiger Punkt der Graden ist. Indem man ihn auf einfachere Formen bringt, erhält man

$$\frac{AQ}{QD}\cdot\frac{DQ'}{Q'B}\cdot\frac{BC}{CA}+\frac{BQ}{QD}\cdot\frac{DA}{AC}\cdot\frac{CQ'}{Q'B}-\frac{CQ}{QD}\cdot\frac{DB}{BQ'}\cdot\frac{Q'A}{AC}+1=0$$

und wenn man den gemeinschaftlichen Nenner wegschafft,

XV. $\left\{\begin{array}{l} QA\,.\,Q'D\,.\,BC+QB\,.\,Q'C\,.\,AD+QC\,.\,Q'A\,.\,DB \\ \qquad +QD\,.\,Q'B\,.\,CA=0 \\ \text{ebenso giebt die zweite der unter VI. aufgeführten} \\ \text{Gleichungen} \\ QA\,.\,Q'C\,.\,BD+QB\,.\,Q'D\,.\,AC+QC\,.\,Q'B\,.\,DA \\ \qquad +QD\,.\,Q'A\,.\,CB=0. \end{array}\right.$

In denselben sind die beiden beliebigen Punkte Q, Q' zu den vier harmonischen in gleichmässige Verbindung getreten.

2) Bringt man die Gleichung VII. unter folgende Form

$$\frac{AQ}{QM}\cdot\frac{BQ}{QN}+\frac{CQ}{QM}\cdot\frac{DQ}{QN}=2$$

und zieht den unendlich fernen Punkt Q' der Graden zur Bildung von Doppelverhältnissen herbei, so erhält zunächst

$$\left(\frac{AQ}{QM}:\frac{AQ'}{Q'M}\right)\left(\frac{BQ}{QN}:\frac{BQ'}{Q'N}\right)+\left(\frac{CQ}{QM}:\frac{CQ'}{Q'M}\right)\left(\frac{DQ}{QN}:\frac{DQ'}{Q'N}\right)=2.$$

Diese Gleichung muss nach §. 40 3. giltig bleiben, auch wenn der Punkt Q' beliebig auf der Graden genommen wird, nur mit der Abänderung, dass dann M und N nicht mehr die Mitten der Abschnitte AB und CD, sondern zugeordnete harmonische Punkte zu Q' bezüglich der Abschnitte AB und CD sind. Die Gleichung reducirt man leicht auf folgende

$$\text{XVI.}\qquad \frac{QA}{AQ'}\cdot\frac{QB}{BQ'}+\frac{QC}{CQ'}\cdot\frac{QD}{DQ'}=2\frac{QM}{MQ'}\cdot\frac{QN}{NQ'},$$

oder, in Doppelverhältnissen ausgedrückt,

$$\text{XVI*}\quad \left\{\begin{array}{l}(QQ'AC)+(QQ'DB)=2(QQ'MC)(QQ'NB)\\(QQ'BC)+(QQ'DA)=2(QQ'MC)(QQ'NA)\\(QQ'AD)+(QQ'CB)=2(QQ'MD)(QQ'NB)\\(QQ'BC)+(QQ'CA)=2(QQ'MD)(QQ'NA)\end{array}\right.$$

wobei also — um dies zu wiederholen — Q und Q' zwei beliebige Punkte, M und N die zu Q' harmonisch zugeordneten Punkte bezüglich der Abschnitte AB und CD sind.

Nimmt man in den vorstehenden Gleichungen den beliebigen Punkt Q als den unendlich fernen der Graden an, so reduciren sich die Doppelverhältnisse in einfache und man erhält z. B. aus der ersten von XVI*.

$$\frac{CQ'}{AQ'}+\frac{BQ'}{DQ'}=2\frac{CQ'}{MQ'}\cdot\frac{BQ'}{NQ'},$$

oder nach Division durch $CQ'.BQ'$

$$\frac{1}{AQ'.BQ'}+\frac{1}{CQ'.DQ'}=\frac{1}{MQ'.NQ'}$$

eine Gleichung, welche als mit VII. identisch angesehen und auf den Ausdruck derselben zurückgeführt werden hann. Man erhält nämlich aus ihr zuvörderst

$$AQ'.BQ'+CQ'.DQ'=2\frac{AQ'.BQ'}{MQ'}\cdot\frac{CQ'.DQ'}{NQ'};$$

da aber M der zu Q' harmonisch zugeordnete Punkt für den Abschnitt AB ist, so hat man, wenn M' die Mitte von AB bezeichnet, nach XII. in 52

$$\frac{AQ'.BQ'}{MQ'}=M'Q',$$

ebenso

$$\frac{CQ' \cdot DQ'}{NQ'} = N'Q',$$

wenn N' die Mitte von CD ist. Die Substitution dieser Werthe giebt

$$AQ' \cdot BQ' + CQ' \cdot DQ' = 2M'Q' \cdot N'Q',$$

d. i. die Gleichung VII.

Es liess sich dieses Resultat auch schon deshalb voraussehen, weil in den Gleichungen XVI. und XVI*, die erst aus VII. abgeleitet worden sind, die beiden Punkte Q und Q' mit den übrigen gleichmässig verbunden vorkommen. Setzt man nun Q' als den unendlich fernen Punkt voraus, so führt diese Annahme unmittelbar wieder zu VII. zurück; ein gleiches Resultat muss man also auch erhalten, wenn Q als der unendlich ferne Punkt angenommen wird.

Da in den Gleichungen XVI* nur Doppelverhältnisse und Constanten vorkommen, so gelten dieselben Relationen *mutatis mutandis* auch für ein Strahlenbüschel von vier Harmonikalen a, b, c, d, zwei beliebigen Strahlen q, q' und den zu q' harmonisch zugeordneten Strahlen m und n bezüglich der Graden a, b und c, d, also:

XVIb. $$\frac{\sin q^\wedge a}{\sin a^\wedge q'} \cdot \frac{\sin q^\wedge b}{\sin b^\wedge q'} + \frac{\sin q^\wedge c}{\sin c^\wedge q'} \cdot \frac{\sin q^\wedge d}{\sin d^\wedge q'} = 2\,\frac{\sin q^\wedge m}{\sin m^\wedge q'} \cdot \frac{\sin q^\wedge n'}{\sin n^\wedge q'}$$

oder

XVI*b. $$\sin(qq'ac) + \sin(qq'db) = 2\sin(qq'mc)\sin(qq'nb)$$

etc.

3) Die erstere der Gleichungen VIII., der man auch nachstehende Form geben kann,

$$\frac{QA \cdot QB}{QD^2} \cdot \frac{CD}{CM} + \frac{QC^2}{QD^2} \cdot \frac{DM}{CM} - 1 = 0$$

giebt, wenn man vermittelst des unendlich fernen Punktes Q' Doppelverhältnisse herstellt,

$$\left(\frac{AQ}{QD} : \frac{AQ'}{Q'D}\right)\left(\frac{BQ}{QD} : \frac{BQ'}{Q'D}\right)\left(\frac{DC}{CM} : \frac{DQ'}{Q'M}\right) + \left(\frac{CQ}{QD} : \frac{CQ'}{Q'D}\right)^2\left(\frac{DM}{MC} : \frac{DQ'}{Q'C}\right) - 1 = 0;$$

eine Gleichung, welche nach 40, 3) giltig bleibt, wenn auch Q' ein beliebiger Punkt der Graden ist, doch mit der Abänderung, dass M nicht mehr die Mitte von AB, sondern den zu Q' zugeordneten harmonischen Punkt bezüglich desselben Abschnitts AB bedeutet. Zieht man die Gleichung zusammen, so erhält man

XVII.
$$\begin{cases} \frac{QA}{AQ'} \cdot \frac{QB}{BQ'} \cdot CD \cdot MQ' + \frac{QC^2}{CQ'^2} Q'C \cdot DM + \frac{QD^2}{DQ'^2} \cdot Q'D \cdot CM = 0; \\ \text{desgleichen giebt die zweite der Gleichungen VIII.} \\ \frac{QC}{CQ'} \cdot \frac{QD}{DQ'} \cdot AB \cdot NQ' + \frac{QA^2}{AQ'^2} Q'A \cdot BN + \frac{QB^2}{BQ'^2} \cdot Q'B \cdot AN = 0, \end{cases}$$

in welcher N der zu Q' zugeordnete harmonische Punkt bezüglich der Strecke CD ist.

Nimmt man den beliebigen Punkt Q als den unendlich fernen der Graden, so geben die vorstehenden Gleichungen

XVIII.
$$\begin{cases} \frac{CD \cdot MQ'}{AQ' \cdot BQ'} + \frac{DM}{CQ'} + \frac{CM}{DQ'} = 0, \\ \frac{AB \cdot NQ'}{CQ' \cdot DQ'} + \frac{BN}{AQ'} + \frac{AN}{BQ'} = 0, \end{cases}$$

welche sich noch weiter vereinfachen, wenn man nach XII. in §. 52

$$\frac{1}{M'Q'} \text{ statt } \frac{MQ'}{AQ' \cdot BQ'} \text{ und } \frac{1}{N'Q'} \text{ statt } \frac{NQ'}{CQ' \cdot DQ'}$$

setzt, wobei M' die Mitte von AB und N' die von CD bedeuten. Man erhält somit

XIX.
$$\begin{cases} \frac{CD}{M'Q'} + \frac{DM}{CQ'} + \frac{CM}{DQ'} = 0, \\ \frac{AB}{N'Q'} + \frac{BN}{AQ'} + \frac{AN}{BQ'} = 0, \end{cases}$$

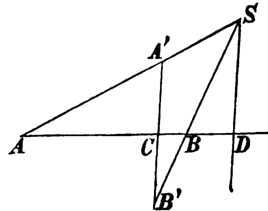
§. 55.

Bestimmung eines harmonischen Punktes oder Strahles, wenn die anderen drei oder deren stellvertretende Elemente gegeben sind.

Aufgabe. Zu drei gegebenen Punkten A, B, C einer Graden den vierten harmonischen D zu finden.

Auflösung. Seien A u. B, sowie C und der gesuchte D einander zugeordnete Punkte.

Fig. 23.



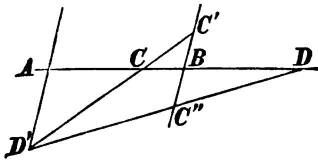
1) Man lege durch C (Fig. 23) eine beliebige Grade, auf der man ein und dieselbe beliebige Strecke von C aus in entgegengesetzten Richtungen nach CA' und CB' abtrage, verbinde hierauf A und A',

B und *B'* durch Grade, welche sich im Allgemeinen in einem Punkte *S* treffen und ziehe durch *S* eine Parallele *SD* zu *A'B'*; diese wird die *AB* in dem verlangten Punkte *D* schneiden. Bezüglich des Beweises vergleiche man §. 41.

Diese und die folgenden Constructionen werden unausführbar, wenn *C* die Mitte von *AB* ist; der Punkt *D* ist dann der unendlich ferne Punkt der Graden.

2) Man lege durch *A* und *B* zwei beliebige Parallelen, trage auf einer derselben z. B. auf der durch *B* gelegten (Fig. 24) von *B* aus zwei gleiche Strecken *BC'* und *BC''* in entgegengesetzter Richtung ab und verbinde den Endpunkt einer dieser Strecken z. B. *C'* mit *C* durch eine Grade, welche die durch *A* gelegte Parallele in *D'* treffe. Legt man dann durch *D'* und den Endpunkt *C''* der andern von *B* aus genommenen Strecke die Grade *D'C''*, so schneidet diese die *AB* in dem verlangten Punkte *D*. Denn es ist

Fig. 24.

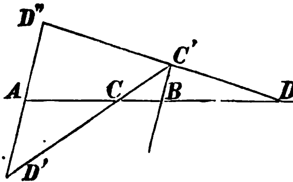


$$\frac{CA}{CB} = \frac{AD'}{BC'}, \quad \frac{DA}{DB} = \frac{AD'}{BC''}, \text{ mithin}$$

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = \frac{BC''}{BC'} = -1.$$

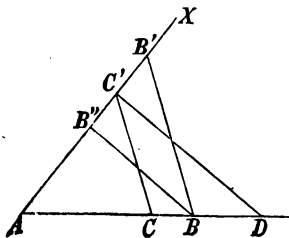
Man könnte ebenso gut auf der durch *A* gelegten Parallele (Fig. 25) zwei gleiche, entgegengesetzt gerichtete Strecken *AD'* und *AD''* abtragen, *D'C* ziehen und den Durchschnittspunkt *C'* mit *D''* durch eine Grade verbinden, welche die *AB* gleichfalls in dem vierten harmonischen Punkte *D* schneidet.

Fig. 25.



3) Man lege durch *A* eine beliebige Grade *AX* (Fig. 26) und durch *B* und *C* ein Paar Parallelen, welche *AX* in *B'* und *C'* treffen, trage von *C'* aus den Abschnitt *C'B'* in entgegengesetzter Richtung nach *C'B''*, verbinde *B''* mit *B* und ziehe zur Graden *B''B* durch *C'* eine Parallele *C'D*, welche die *AB* im gesuchten

Fig. 26.



Punkte D treffen wird. Denn man hat

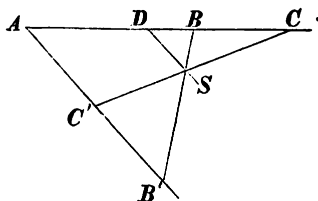
$$\frac{AC}{CB} = \frac{AC'}{C'B'} \text{ und } \frac{AD}{DB} = \frac{AC'}{C'B''}$$

folglich

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = \frac{C'B''}{C'B'} = -1$$

4) Man lege durch A eine beliebige Grade (Fig. 27) und trage auf derselben zwei gleiche beliebig grosse Abschnitte AC', $C'B'$ hintereinander in gleicher Richtung ab, ziehe durch B und B', und durch C und C' zwei Grade, welche sich in S schneiden, und durch S eine Parallele SD zu AB', welche die AB im gesuchten Punkte D trifft. (S. §. 41, 1. b.)

Fig. 27

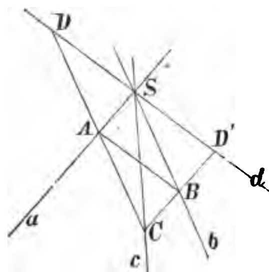


§. 56.

Aufgabe. Zu drei gegebenen Strahlen a, b, c eines Büschels S den vierten harmonischen d zu ziehen.

Auflösung. Seien a und b, sowie c und der gesuchte d einander zugeordnete Strahlen.

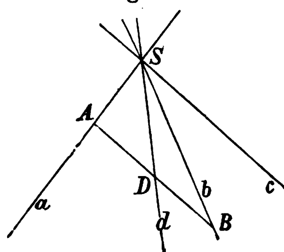
Fig. 28.



1) Man nehme (Fig. 28) in c beliebig einen Punkt C an, ziehe durch denselben zwei Parallelen zu a und b, welche b und a in B und A treffen, verbinde diese Durchschnittspunkte durch eine Grade und lege parallel zu derselben durch S einen Strahl d, welcher der geforderte sein wird.

2) Man lege durch den in c beliebig angenommenen Punkt C eine Parallele zu b (a), die den Strahl a (b) in A (B) schneidet, verlängere CA (CB), mache die Verlängerung AD $(BD) = CA$ (CB) und ziehe die Grade SD (SD'), so ist diese die verlangte Harmonikale d.

Fig. 29.



3) Man ziehe (Fig. 29) zum Strahle c eine beliebige Parallele, welche die beiden anderen Strahlen a und b in A und B

schneidet, halbire AB in D und ziehe SD oder d. Der Beweis für diese Constructionen*) gründet sich einfach auf §. 44 und 46. 1.

§. 57.

Aufgabe. Von vier harmonischen Punkten einer Graden sind zwei einander zugeordnete A und B, sowie die Mitte N des zwischen den beiden andern liegenden Abschnittes CD gegeben, man soll die letzteren bestimmen.

Auflösung. Nach X. in §. 51 hat man

$$NC = -ND = \pm \sqrt{NA.NB}.$$

Legt man also durch die beiden Punkte A und B einen beliebigen Kreis (oder, etwas kürzer, einen Halbkreis) und an denselben von N aus eine Tangente, so ist der Abschnitt derselben von N bis zum Berührungspunkte absolut genommen gleich der Entfernung der Punkte C und D von N.

Anmerkung. Der Ausdruck für NC oder ND, sowie die angegebene Construction giebt zu erkennen, dass N ein äusserer Punkt des Abschnittes AB sein muss, wenn der Werth von $\sqrt{NA.NB}$ reell, oder wenn die Construction einer Tangente möglich sein soll (vergl. §. 44, 5 und 6). Wollte man N als einen innern Punkt der AB voraussetzen, und die Abschnitte NA, NB in absolutem Sinne, d. h. ohne Berücksichtigung der Vorzeichen nehmen, so hätte man durch N die kürzeste Sehne eines durch A und B gelegten Kreises zu ziehen. Da dieselbe senkrecht auf dem durch N gelegten Durchmesser des Kreises steht und von ihm in N halbirt wird, so vereinfacht sich bekanntermaassen die Construction, wenn man AB als Durchmesser des Kreises annimmt. Hält man das Princip der Zeichen fest, so hat man

$$NC = -ND = \pm \sqrt{NA.NB}\,\sqrt{-1}$$

zu setzen und nach den Regeln für die Construction imaginärer Linien NC und $-ND$ als zwei einander entgegengesetzte und auf AB senkrechte Abschnitte, deren Länge absolut $= \sqrt{NA.NB}$ ist, darzustellen. (vgl. 5. Cap.)

§. 58.

Zusatz. Ist M die Mitte von AB, so hat man

$$MC = MN + NC, \quad MD = MN + ND;$$

$$MN = \tfrac{1}{2}(AN + BN); \; NC = -ND = \pm \sqrt{AN.BN},$$

---

*) Diese Constructionen, sowie auch die des vorhergehenden §. werden sich als Specialisirungen zweier allgemeinerer, die wieder in dualer Beziehung zu einander stehen, herausstellen. Vergl. §. 63.

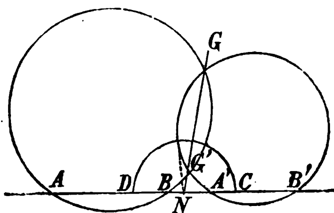
mithin $$MC = MD = \tfrac{1}{2}(AN + BN \pm 2\sqrt{AN.BN}),$$
$$= \tfrac{1}{2}(\sqrt{AN} \pm \sqrt{BN})^2;$$
oder wenn man mit $(\sqrt{AN} \mp \sqrt{BN})^2$ multiplicirt und dividirt,
$$MC = MD = \frac{AB^2}{2(\sqrt{AN} \mp \sqrt{BN})^2};$$
Ausdrücke, welche zwar weniger für eine Construction sich eignen, ihrer Form wegen jedoch immer bemerkenswerth sind und später weitere Anwendung finden.

§. 59.

Aufgabe. Es sind zwei Punktepaare A, B und A' und B' in einer Graden gegeben, man soll zwei andere Punkte C und D bestimmen, welche mit jedem der gegebenen Paare ein System von vier harmonischen Punkten bilden, so dass
$$(ABCD) = (A'B'CD) = -1$$
ist.

Auflösung. Hätte man die Mitte N des zwischen den gesuchten Punkten liegenden Abschnittes CD gefunden so wäre die Aufgabe nach §. 57 als gelöst zu betrachten, dieser Punkt N muss also zugleich derjenige der Graden AB sein, von welchem aus sich zwei gleiche Tangenten an zwei durch AB und $A'B'$ gelegten Kreise ziehen lassen.*) Um denselben zu finden, lege man durch einen beliebigen Punkt G (Fig. 30) ausserhalb AB zwei Kreise von denen der eine noch durch A und B, der andere durch A' und B' geht. Diese schneiden sich noch in einem zweiten Punkte G'. Legt man nun durch G und G' eine Grade, so trifft diese die AB in dem Punkte N, von dem aus man eine Tangente an einen der beiden Kreise zieht, deren Länge den Abschnitten NC und ND gleich ist. Jede von N aus an die beiden Kreise gelegte Tangente ist nämlich $= \sqrt{NG.NG'} = \sqrt{NA.NB} = \sqrt{NA'.NB'}$, mithin erfüllen auch die somit bestimmten Punkte C und D den Bedingungsgleichungn X. (§. 51), oder den in der Aufgabe gestellten Forderungen.

Fig. 30.



*) D. h. N ist der Durchschnittspunkt der Potenzlinie oder Chordale dieser Kreise mit der Graden AB.

Anmerkung. Liegen die beiden Abschnitte AB, $A'B'$ auf der Graden so, dass sie theilweise über einander liegen (in einander eingreifen, m. s. d. folgende Capitel), so müssen die beiden Schneidepunkte G, G' der Kreise zu beiden Seiten der AB liegen und der Punkt N auf das beiden Abschnitten gemeinschaftliche Stück der Graden fallen. Es ist dann N ein innerhalb beider Kreise liegender Punkt von dem aus eine Tangente an die beiden Kreise zu legen unmöglich ist. Damit wird auch die Construction der Punkte C und D unmöglich, was mit dem §. 44, 5 und 6 Bemerkten übereinstimmt.

Vorstehende Aufgabe möge einstweilen nur als nothwendige Ergänzung zu §. 44, 5, 6, und zum Nachweis dienen, dass daselbst nicht unnöthige Voraussetzungen, welche einer reellen Begründung entbehren, gemacht worden sind. Im folgenden Kapitel wird dieselbe Aufgabe in einer andern Auffassung wiederholt und mit den nöthigen Determinationen versehen werden.

Bemerkung. Die einfachsten Figuren, an welchen Doppel- und harmonische Verhältnisse in unmittelbarster Weise zur Anwendung kommen, sind Systeme von vier Punkten oder vier Graden in einer Ebene. Obgleich die Anwendungen der Sätze der vorhergehenden und nächsten Capitel einem spätern Abschnitte vorbehalten bleiben, um sie im gehörigen Zusammenhange und übersichtlicher zu geben, so mögen doch im Nachstehenden bezüglich jener Figuren einige Sätze und daraus entspringende Aufgaben theils ihres besondern Interesses halber theils zum bessern Verständniss mehrerer im fünften Capitel erwähnter Eigenschaften ebener Figuren herausgehoben werden.

§. 60.

Harmonische Verhältnisse am vollständigen Viereck und Vierseit.

Lehrsatz. Verbindet man vier beliebige Punkte einer Ebene, von denen keine drei in einer Graden liegen, zu je zweien durch Grade und die somit entstandenen Durchschnittspunkte wiederum durch Grade, so erhält man ein System von neun Linien, von denen jede durch die übrigen in vier harmonischen Punkten geschnitten wird.

Seien (Fig. 31) A, B, C, D die vier Punkte, A', B', C' die Durchschnittspunkte der gegenüberliegenden Graden BC und DA, CA und DB, CD und AB, und es werde die AB und CD von $A'B'$ in $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$, die BC und DA von $B'C'$ in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$, endlich die CA und

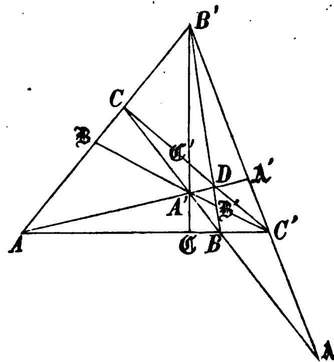


Fig. 31.

DB von $C'A'$ in $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ geschnitten, so sind die vier Punkte, welche in jeder der neun Graden liegen, harmonische Punkte. Der Beweis lässt sich für jede dieser Graden wie folgt führen: Die von B ausgehenden Strahlen $B'A, B'B, B'\mathfrak{C}, B'\mathfrak{C}'$ treffen die Graden AB und CD in entsprechenden Punkten, man hat daher

$$(AB\mathfrak{C}C') = (CD\mathfrak{C}'C').$$

Von denselben Punkten CD gehen aber vier Strahlen aus, welche sich in A' vereinigen und welche die AB ebenfalls in entsprechenden Punkten schneiden, so dass

$$(CD\mathfrak{C}'C') = (BA\mathfrak{C}C')$$

ist. Hieraus folgt aber

$$(AB\mathfrak{C}C') = (BA\mathfrak{C}C'),$$

d. h. das Doppelverhältniss $(AB\mathfrak{C}C')$ ist seinem reciproken gleich; es muss daher sein Werth $= \pm 1$ sein. Nun kann aber der Werth eines Doppelverhältnisses nicht $= +1$ sein, wenn nicht zwei Punkte zusammenfallen sollen (§. 26), folglich ist $(AB\mathfrak{C}C) = -1$, oder AB ist in $\mathfrak{C}$ und C' harmonisch getheilt. Nach §. 35 folgt für A' als Strahlenmittelpunkt die Gleichheit der Doppelverhältnisse

$$(AB\mathfrak{C}C') = (\mathfrak{A}'\mathfrak{A}B'C') = (DC\mathfrak{C}'C') = (DBB'\mathfrak{B}') = (ACB'\mathfrak{B}),$$

ferner für B' als Strahlenmittelpunkt

$$(AB\mathfrak{C}C') = (\mathfrak{B}\mathfrak{B}'A'C') = (CD\mathfrak{C}'C') = (ADA'\mathfrak{A}') = (CBA'\mathfrak{A}),$$

endlich für C' als Strahlenmittelpunkt

$$(ACB'\mathfrak{B}) = (\mathfrak{C}\mathfrak{C}'B'A') = (AD\mathfrak{A}'A') = (BC\mathfrak{A}A') = (BDB'\mathfrak{B}').$$

Ist nun eins dieser Doppelverhältnisse (von denen nur neun als verschiedene aufzuzählen sind), wie $(AB\mathfrak{C}C')$ ein harmonisches, so sind es, wie leicht zu übersehen, auch alle.

§. 61.

Erklärungen. Nach dem Vorgange von Carnot und Steiner (s. Systemat. Entwickelung geom. Gestalten §. 19) unterscheidet man einfache und vollständige Figuren, Vielseite und Vielecke. Der Unterschied dieser Begriffe wird sich leicht aus folgenden Erklärungen herausheben lassen.

1) **Vollständiges Vierseit** heisst das System von irgend vier Graden oder **Seiten** a, b, c, d; dasselbe hat sechs Durchschnitte oder **Ecken**, in welchen sich je zwei dieser Graden schneiden, nämlich $a \cdot b$, oder kürzer ab, ac, ad, bc, bd, cd, und von denen je zwei, welche keine Seite mit einander gemein haben, einander gegenüberliegen, nämlich ab und cd, ac und bd, ad und bc; es hat demnach auch drei Diagonalen, deren jede zwei gegenüberliegende Eckpunkte verbindet, und welche mit $ab-cd$, $bc-ad$, $ac-bd$ bezeichnet werden können.

2) **Vollständiges Viereck** heisst das System von vier beliebigen Punkten oder **Ecken** A, B, C, D; dasselbe hat 6 Grade oder **Seiten**, welche durch je zwei dieser Ecken gelegt sind, nämlich AB, AC, AD, BC, BD, CD, und von denen je zwei, die keinen Eckpunkt mit einander gemein haben, einander gegenüberliegen, nämlich AB und CD, AC und BD, AD und BC; es hat demnach auch drei Durchschnitte gegenüberliegender Seiten, die mit $AB \cdot CD$, $AC \cdot BD$, $AD \cdot BC$ bezeichnet werden können.

Das **vollständige** Vierseit kat drei **einfache** Vierseite; von den sechs Ecken lassen sich nämlich dreimal vier in einem zusammenhängenden Zuge verbinden, welcher mit den vier Seiten zusammenfällt, nämlich

$ab-bc-cd-da$ oder kürzer bezeichnet $abcda$,
$ac-cd-db-ba$ „ „ „ $acdba$,
$ad-db-bc-ca$ „ „ „ $adbca$.

In den abgekürzten Ausdrücken hat man von jeder Seite die Strecke zu nehmen, welche zwischen den Durchschnitten der Seite mit der im Ausdrucke vorhergehenden und der nachfolgenden enthalten ist. — Jeder dieser genannten Züge stellt ein **einfaches Vierseit** vor.

Desgleichen enthält das vollständige Viereck drei einfache Vierecke; von den sechs Seiten lassen sich nämlich dreimal vier zu einem zusammenhängenden Zuge verbinden, welcher gleichmässig durch die vier Ecken hindurchgeht, nämlich

$AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA$ oder kürzer und wie gewöhnlich bezeichnet $ABCDA$
$AC \cdot CD \cdot DB . BA$ „ „ „ „ „ „ $ACDBA$,
$AD \cdot DB \cdot BC \cdot CA$ „ „ „ „ „ „ $ADBCA$.

Jeder dieser Züge stellt ein **einfaches Viereck** vor.

Ein einfaches Viereck ist auch zugleich ein einfaches Vierseit,

sowie überhaupt ein einfaches nEck auch zugleich ein einfaches nSeit ist. Ergänzt man jedoch ein und dasselbe einfache Viereck oder Vierseit einmal zu einem vollständigen Viereck und dann zu einem vollständigen Vierseit, so bekommt man zwei verschiedene Figuren, die nur bezüglich des ursprünglichen Vierecks oder Vierseits übereinstimmen. Dasselbe gilt auch für das vollständige nEck und nSeit.

Allgemein heisst ein vollständiges nSeit jedes System von n Graden oder Seiten; dasselbe hat $\frac{1}{2}n.(n-1)$ Durchschnitte oder Ecken, in denen sich je zwei Seiten schneiden, welche wieder durch $\frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4}$ Diagonalen mit einander verbunden werden können; es besteht aus $3.4..(n-1)$ einfachen nSeiten.

Desgleichen heisst ein vollständiges nEck jedes System von n Punkten oder Ecken; dasselbe hat $\frac{1}{2}n.(n-1)$ Grade oder Seiten, welche durch je zwei Ecken gezogen sind, und diese durchschneiden sich wieder in $\frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4}$ Durchschnittspunkten; es besteht aus $3.4...(n-1)$ einfachen nEcken.

Denn in dem vollständigen nSeit wird jede der nSeiten von den übrigen $(n-1)$ in $(n-1)$ Punkten geschnitten, dies gäbe $n.(n-1)$ Durchschnitte, wenn dabei nicht jeder doppelt gezählt worden wäre. Ebenso kann man im vollständigen nEck jede der nEcken mit den übrigen $(n-1)$ durch $(n-1)$ Grade verbinden, wobei aber wieder jede Grade doppelt vorkommt.

Die $\frac{1}{2}n(n-1)$ Ecken des vollständigen nSeits liessen sich ferner durch $\frac{\frac{1}{2}n(n-1).[\frac{1}{2}n.(n-1)-1]}{2}$ Grade verbinden, wenn nicht jede Ecke mit noch $(n-2)$ anderen in einer der nSeiten des vollständigen nSeits lägen; es können also von jedem Punkte nach $n-2$ andern Punkten keine Grade gezogen werden, wenn von den neuen Graden nicht eine mit irgend einer Seite des nSeits zusammenfallen soll; man hat somit nur

$$\frac{\frac{1}{2}n(n-1)[\frac{1}{2}n(n-1)-1]}{2}-\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$$
$$=\frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4} \text{ Grade.}$$

Ebenso würden sich die $\frac{1}{2}n(n-1)$ Seiten des vollständigen

1) Vollständiges Vierseit [illegible] vier Geraden oder Seiten a, b, c, d; [illegible] schnitte oder Ecken, in welchen sich je zwei die[ser] [illegible] den, nämlich 6, oder kürzer ab, ac, ad, bc, bd, cd, und [illegible] je zwei, welche keine Seite mit einander gemein haben, [illegible] gegenüberliegen, nämlich ab und cd, ac und bd, ad und [illegible] demnach auch drei Diagonalen, deren jede zwei gegenü[berliegende] Eckpunkte verbindet, und welche mit ab—cd, bc—ad, [illegible] zeichnet werden können.

2) Vollständiges Viereck heisst das System [illegible] liebigen Punkten oder Ecken A, B, C, D; dasselbe [illegible] oder Seiten, welche durch je zwei dieser Ecken geleg[t] [illegible] lich AB, AC, AD, BC, BD, CD, und von denen je zwei [illegible] Eckpunkt mit einander gemein haben, einander gege[nüberliegen] [illegible] nämlich AB und CD, AC und BD, AD und BC; es hat d[illegible] drei Durchschnitte gegenüberliegender Seiten, die [illegible] AC—BD, AD—BC bezeichnet werden können.

Das vollständige Vierseit hat drei einfach[e] [illegible] von den sechs Ecken lassen sich nämlich dreimal vier [illegible] zusammenhängenden Züge verbinden, welcher mit den vi[er] [illegible] zusammenfällt, nämlich

ab—bc—cd—da oder kürzer bezeichnet abc[illegible]
ac—cd—db—ba " " " acd[illegible]
ad—db—bc—ca " " " adb[illegible]

In diesen abgekürzten Ausdrücken hat man von j[illegible] Strecke zu nehmen, welche zwischen den Durchschni[tt] [illegible] mit dem im Ausdrucke vorhergehenden und der nach[illegible] halten ist. — Jeder dieser genannten Züge stellt ei[n] [illegible] Vierseit vor.

Desgleichen enthält das vollständige Viereck [illegible] Vierecke; von den sechs Seiten lassen sich nämlich [illegible] zu einem zusammenhängenden Zuge verbinden, w[illegible] umkreist, demnach die vier Ecken hindurchgeht, nämlich [illegible] gewöhnlich bezeichnet [illegible]

AB—BC—CD—DA oder kürzer und [illegible]
AC—CD—DB—BA " " [illegible]
AD—DB—BC—CA " " [illegible]

Jeder dieser genannten Züge stellt ein [illegible] Viereck [illegible] [illegible] einfaches Viereck [illegible]

ch
sch

ken
n, so
edes-
urch-
andern

agonal-)
ändigen
r Durch-
hen Strah-
s Vierecks,
len andern
lden.
Lösung folgen-
n).

ischen Punktes

en A, B, C einer Gra-
n.

Fig. 32.

nEcks in $\frac{\frac{1}{2}n(n-1).[\frac{1}{2}n.(n-1)-1]}{2}$ Punkten durchschneiden, wenn nicht jede Seite mit noch $(n-2)$ anderen in einer der nEcken des vollständigen nEcks zusammenträfe, es müssen also in jeder Seite $(n-2)$ Punkte weniger angenommen werden, wenn von den neuen Punkten nicht einer mit irgend einer Ecke des nEcks zusammenfallen soll; somit giebt es nur

$$\frac{\frac{1}{2}n(n-1)[\frac{1}{2}n(n-1)-1]}{2}-\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$$
$$=\frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4} \text{ Durchschnittspunkte.}$$

Um ein einfaches nSeit zu bilden, geht man von der ersten Seite zur zweiten, von dieser zur dritten u. s. w. in einem zusammenhängenden Zuge fort, bis man über der letzten wieder zur ersten kommt. Da nun jede Seite die erste sein kann, und jede andere wieder unabhängig von dieser die zweite, dritte etc., so wäre die Anzahl der einfachen nSeite gleich der Permutationszahl von n Elementen, d. i. $1.2.3.4\ldots n$, wenn nicht

1) je n einfache Vielseite, in welchen die Ordnung der aufeinander folgenden Seiten dieselbe und nur die Anfangsseite verschieden ist, identisch wären; z. B. bei 6 Seiten *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *abcdefa*, *bcdefab*, *cdefabc*, *defabcd*, *efabcde*, *fabcdef*;

2) je 2 Vielseite, in welchen die Ordnung der aufeinander folgenden Seiten die entgegengesetzte ist, zusammenfielen, z. B. *abcdefa* und *afedcba*.

Daher ist die Anzahl der verschiedenen einfachen nSeite

$$=3.4.5\ldots(n-1).$$

Ebenso lässt sich nachweisen, dass die Anzahl der einfachen nEcke eines vollständigen nEcks

$$=3.4.5\ldots(n-1) \text{ ist.}$$

§. 62.

Anderer Ausdruck des Satzes in §. 60. Die Figur zu 31 kann man sowohl als ein vollständiges Vierseit wie auch als vollständiges Viereck auffassen. Sind AB, BC, CD, DA die vier Seiten des Vierseits, so sind A, B, C, D, A', C' dessen Ecken und AC, BD, $A'C'$ die Diagonalen; jede dieser Diagonalen wird von den beiden andern harmonisch getheilt. Sind dagegen A, B, C, D

die vier Ecken des Vierecks, so sind *AB*, *BC*, *CD*, *DA*, *AC*, *BD* die sechs Seiten, von denen je zwei gegenüberliegende sich in *A'*, *B'*, *C'* schneiden; die Verbindungsgraden *A'B'*, *B'C'*, *C'A'* werden durch je zwei gegenüberliegende Seiten des Vierecks ebenfalls harmonisch getheilt.

Daher:

1) Legt man durch die gegenüberliegenden Ecken des vollständigen Vierseits die drei Diagonalen, so liegen in jeder vier harmonische Punkte, wobei jedesmal die zwei Ecken des Vierseits und die Durchschnittspunkte der Diagonale mit den beiden andern zugeordnete Paare bilden.

2) Verbindet man die Durchschnitts-(Diagonal-) Punkte gegenüberliegender Seiten eines vollständigen Vierecks durch Grade, so ist jeder dieser Durchschnittspunkt Mittelpunkt eines harmonischen Strahlenbüschels, indem jedesmal zwei Seiten des Vierecks, sowie die Verbindungsgraden mit den beiden andern Diagonalpunkten zugeordnete Strahlen bilden.

Diese beiden Sätze begründen unmittelbar die Lösung folgender beiden Aufgaben (vermittels des Lineals allein).

§. 63.

Construction eines vierten harmonischen Punktes oder Strahles.

Aufgaben. 1) Zu drei gegebenen Punkten *A*, *B*, *C* einer Graden den vierten harmonischen *D* zu bestimmen.

2) Zu drei gegebenen Graden *a*, *b*, *c* eines Büschels die vierte Harmonikale *d* zu ziehen.

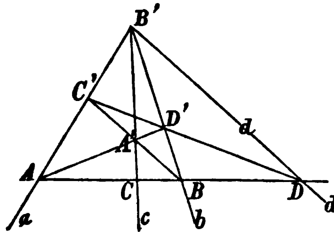
Fig. 32.

Auflösung. 1) Sind *A* und *B* (Fig. 32), sowie *C* und der gesuchte vierte Punkt einander zugeordnet, so betrachte man *AB* als Diagonale eines Vierseits, dessen zweite Diagonale durch *C* geht und dessen dritte Diagonale daher die

erste in dem gesuchten Punkte D schneiden muss. Zu dem Ende lege man durch C eine beliebige Grade, nehme in derselben irgend zwei Punkte A' und B' an und verbinde dieselben mit A und B durch die Graden AA', AB', BA', BB', welche sich in noch zwei Punkten C' und D' schneiden; die Verbindungsgrade $C'D'$ trifft dann die AB in dem gesuchten harmonischen Punkte D.

2) Sind a und b (Fig. 32), sowie c und die geforderte Harmonikale einander zugeordnet, so nehme man auf c einen beliebigen Punkt A' an, lege durch denselben zwei beliebige Grade, welche a in A und C', b in D' und B schneiden und ziehe die Graden AB, $C'D'$, welche sich in D treffen; legt man dann durch den Strahlenmittelpunkt B' und durch D eine Grade d, so ist diese die vierte Harmonikale.

Fig. 32.



Anmerkung. Die Lösungen der Aufgaben in 55 und 56 können leicht als Specialisirungen der vorstehenden angesehen werden.

§. 64.

Aufgaben. 1) Gegeben drei Grade a, b, c und ein Punkt D; es soll eine Grade e durch D gelegt werden, so dass die Durchschnittspunkte $e \cdot a$, $e \cdot b$, $e \cdot c$ derselben mit den gegebenen Graden und der Punkt D vier harmonische Punkte sind.

2) Gegeben drei Punkte A, B, C und eine Grade d, es soll in letzterer ein Punkt E gefunden werden, so dass die von demselben nach den drei gegebenen Punkten gezogenen Graden EA, EB, EC, und die Grade d ein harmonisches Strahlenbüschel bilden.

Auflösung zu 1). Man lege durch D und den Durchschnittspunkt $a \cdot b$ eine Grade d, suche zu a, b, d den vierten harmonischen Strahl d_1 und ziehe nach den Durchschnittspunkt $d_1 \cdot c$ oder C von D aus eine Grade e, so wird diese von a, b, c in drei Punkten A, B, C geschnitten, zu welchen D der vierte harmonische ist.

Auflösung zu 2). Man bestimme den Durchschnittspunkt D von d und AB, suche zu A, B, D den vierten harmonischen Punkt

D' und bestimme den Durchschnittspunkt *E* der Graden *CD'* und *d*, so ist dieser der Strahlenmittelpunkt für die Harmonikalen *EA*, *EB*, *EC* und *d*.

Jede der beiden Auflösungen lässt zunächst drei Lösungen zu, je nachdem man in der ersten die Grade *d* nach den Punkten $a \cdot b$, oder $b \cdot c$, oder $c \cdot a$ zieht und in der zweiten den Durchschnittspunkt von *d* mit *AB* oder *BC*, oder *CA* bestimmt. In jedem dieser Fälle kann man wieder einerseits *a* und *b*, oder *a* und *d* oder *b* und *d* als zugeordnete Strahlen, andererseits *A* und *B*, oder *A* und *D*, *B* und *D* als zugeordnete harmonische Punkte nehmen.

Viertes Capitel.

Von den Involutionen.

---

§. 65.

Erklärung. Wenn drei Punkte A, B, C einer Graden einzeln drei andern A', B', C' derselben Graden so zugeordnet sind, dass ein Doppelverhältniss zwischen vieren dieser sechs Punkte, wie $(ABCC')$ dem Doppelverhältniss $(A'B'C'C)$ der den vier ersten zugeordneten Punkte gleich ist, so sagt man (nach Désargues), dass die sechs Punkte der Graden (die drei Paare von Punkten A, A', B, B', C, C') eine Involution bilden, oder in Involution stehen.

Lehrsatz. Ist bei drei Paaren von Punkten A und A', B und B', C und C' das Doppelverhältniss von irgend vieren dieser sechs Punkte z. B. $(ABCC')$ dem der vier zugeordneten $(A'B'C'C)$ gleich, so gilt dieses auch für je zwei andere Doppelverhältnisse, welche zwischen vier andern Punkten und den vier zugeordneten aufgestellt werden können.

Beweis. 1) Ist

$$(ABCC') = (A'B'C'C), \text{ so ist auch nach §. 27}$$
$$(ACC'B) = (A'C'CB'),$$

oder

$$\frac{AC'}{C'C} : \frac{AB}{BC} = \frac{A'C}{CC'} : \frac{A'B'}{B'C'}.$$

Setzt man AA' oder BB' für CC' ein, so bleibt die Gleichheit der Verhältnissquotienten noch bestehen und man hat

$$\frac{AC'}{A'A} : \frac{AB}{BC} = \frac{A'C}{AA'} : \frac{A'B'}{B'C'},$$

oder

$$\frac{AA'}{A'C} : \frac{AB}{BC} = \frac{A'A}{AC'} : \frac{A'B'}{B'C'},$$

d. i. $(ACA'B) = (A'C'AB')$,

mithin auch nach §. 27

$$(BCAA') = (B'C'A'A).$$

Ebenso findet man durch Einsetzen von BB' für CC'

$$(CABB') = (C'A'B'B).$$

Offenbar sind hiermit die Fälle erschöpft, welche bei einer Vertauschung der Punktepaare, (oder der Buchstaben abgesehen von den Accenten) aufgestellt werden können.

2) Wird in einem Doppelverhältniss ein Punkt mit seinem zugeordneten vertauscht, so bleibt die Gleichheit der Doppelverhältnisse ebenfalls bestehen. Denn aus $(ABCC') = (A'B'C'C)$ folgt

$$\frac{(CC'AB)}{(CC'B'A')} = 1$$

und nach §. 30

$$\frac{(CC'AB')}{(CC'BA')} = 1,$$

d. i. $(AB'CC') = (A'BC'C)$.

Ebenso ergiebt sich

aus $(BCAA') = (B'C'A'A)$

$(BC'AA') = (B'CA'A)$;

und aus $(CABB') = (C'A'B'B)$

$(CA'BB') = (C'AB'B)$.

§. 67.

Vier andere die Involution bezeichnende Gleichungen. 1) Sind die Punktepaare A und A', B und B', C und C' in Involution, so folgt aus $(AA'BC) = (A'AB'C')$ nach §. 27

$$(ABCA') = (A'B'C'A),$$

oder in gewöhnlicher Form

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AA'}{A'B} = \frac{A'C'}{C'B'} : \frac{A'A}{AB'}.$$

Dividirt man aus dieser Gleichung AA' heraus und zieht alle Verhältnisse auf eine Seite der Gleichung, so erhält man

$$\text{a)} \quad \frac{AC}{CB} \cdot \frac{BA'}{A'C'} \cdot \frac{C'B'}{B'A} = -1.$$

In gleicher Weise ergiebt sich aus $(BB'CA) = (B'BC'A')$ und aus $(CC'AB) = (C'CA'B')$

b) $$\frac{A'C'}{C'B}\cdot\frac{BA}{AC}\cdot\frac{CB'}{B'A'}=-1,$$

c) $$\frac{AC}{CB}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{C'B'}{B'A}=-1.$$

Endlich erhält man aus der nach §. 66, 2. gefolgerten Gleichheit der Doppelverhältnisse $(CA'BC') = (C'AB'C)$ auf demselben Wege

d) $$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=-1.$$

Dasselbe Resultat bekommt man auch aus

$$(AB'CA') = (A'BC'A) \text{ und } (BC'AB') = (B'CA'B).$$

2) Umgekehrt kann jeder der unter a) ... d) aufgestellten Ausdrücke in ein Product und nach §. 27 in die Gleichheit zweier Doppelverhältnisse umgeformt werden, drückt also selbstständig und zureichend aus, dass die drei Punktepaare A und A', B und B', C und C' in Involution sind. Denn es ist allgemein

$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=-\left(\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'A}\right)\left(\frac{AA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\right)$$
$$=-(ABC'A')(ACA'B').$$

Ist also das Product der drei ersteren Verhältnisse $=-1$, so ist auch das Product der beiden Doppelverhältnisse $=+1$, folglich nach §. 27. II.

$$(ABC'A') = (A'B'CA),$$

d. h. das Doppelverhältniss von vier Punkten ist gleich dem der vier zugeordneten Punkte oder die drei Punktepaare stehen in Involution (§. 65).

Ebenso lässt sich jeder der übrigen unter a) — d) aufgestellten Ausdrücke in ein Product zweier reciproker oder in zwei gleiche Doppelverhältnisse zwischen zugeordneten Punkten auflösen.

§. 68.

Zweite Definition und symbolischer Ausdruck für die Involution zwischen sechs Punkten einer Graden; Dreieckschnittsverhältnisse. Werden die drei Seiten AB, BC, CA eines Dreiecks in den Punkten C', A', B' geschnitten, wobei diese Punkte sowohl in den Seiten selbst, als in deren Verlängerungen liegen können, so nennt Herr Möbius (baryc. Calcul S. 298) das Product der Verhältnisse, nach welchen die Dreiecksseiten in den drei Punkten geschnitten werden, nämlich

$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=\varDelta$$

ein Dreieckschnittsverhältniss.

In dem besondern Falle, dass die drei Seiten des Dreiecks in Eine Grade fallen, also sowohl die Ecken als auch die Schnittpunkte der Seiten in derselben Graden liegen, kann man sich vorstellen, dass drei aneinander stossende Abschnitte oder Strecken AB, BC, CA einer Graden getheilt werden resp. in den Punkten C', A', B' und man kann das Product der Verhältnisse, nach welchen die Strecken getheilt sind, oder

$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=\varDelta$$

ebenfalls (nach Möbius) das Dreieckschnittsverhältniss (Drillingsverhältniss, Tripelverhältniss) der sechs Punkte A, B, C, C', A', B' nennen.

Jedes Dreieckschnittsverhältniss zwischen sechs Punkten einer Graden kann nun auf mehrfache Weise durch das negative Product oder Verhältniss zweier Doppelverhältnisse wiedergegeben werden. Denn man hat, wie schon oben gezeigt worden ist,

$$\begin{aligned}\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}&=-\left(\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{AA'}\right)\left(\frac{AA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\right)\\&=-(ABC'A')\;(ACA'B')\\&=-\frac{(ABC'A')}{(A'B'CA)}.\end{aligned}$$

Dasselbe Dreieckschnittsverhältniss kann man aber auch schreiben

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}\text{ oder }\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C};$$

schiebt man hierin auf dieselbe Weise, wie $A'A$ in dem erstgenannten Ausdrucke, in den zweiten $B'B$, in den dritten $C'C$ ein, so erhält man die gleichbedeutenden Producte oder Verhältnisse

$$-(BCA'B')\,(BAB'C')=-\frac{(BCA'B')}{(B'C'AB)}=$$

$$-(CAB'C')(CBC'A')=-\frac{(CAB'C')}{(C'A'BC)}.$$

Die Form und Zusammensetzung der Verhältnisse oder Quotienten der Doppelverhältnisse prägt sich dabei dem Gedächtnisse besser ein.

Das Dreiekschnittsverhältniss zwischen sechs Punkten einer

Graden lässt sich ferner als eine Erweiterung des Doppelverhältnisses zwischen vier Punkten einer Graden oder letzteres nach demselben Princip der Bildung wie ersteres auffassen. Schreibt man nämlich das Doppelverhältniss $(ABCC')$ in folgender Form

$$\frac{AC}{CB} \cdot \frac{BC'}{C'A},$$

so stellt dasselbe das Product der beiden Verhältnisse dar, nach welchen die Strecken AB und BA resp. in den Punkten C, C' geschnitten sind, und man könnte füglich das Doppelverhältniss als ein Zweieckschnittsverhältniss bezeichnen. (Möbius baryc. Calc. S. 299.)

Nach Analogie in der Bezeichnung der Doppelverhältnisse mag auch für das Dreieckschnittsverhältniss

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A}$$

der symbolische Ausdruck

$$(ABC,\ C'A'B')$$

eingeführt werden, welcher so zu verstehen und zu übersetzen ist, dass die drei ersten Buchstaben A, B, C (die erste Ternion) dessel ben die drei Punkte bezeichnen, welche als Endpunkte der getheilten Strecken aufzufassen sind — wobei die Strecken durch die cyclische Aufeinanderfolge der drei Buchstaben A, B, C als

$$AB,\ BC,\ CA$$

bestimmt werden — während die drei letzten Buchstaben (die zweite Ternion) C', A', B' der Reihe nach die Schnittpunkte der durch die erste Ternion bestimmten Abschnitte AB, BC, CA bedeuten; so dass also AB in die Abschnitte AC' und $C'B$, BC in BA' und $A'C$ und CA in CB' und $B'A$ getheilt ist, aus welchen Abschnitten das Product der Verhältnisse

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A}$$

oder die gewöhnliche Form des Dreieckschnittsverhältnisses hergestellt wird.

Zur bequemen und schnellen Uebertragung des Ausdrucks $(ABC,\ C'A'B')$ in den andern bemerke man, dass aus der ersten Ternion ABC das Schema

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{B}{C} \cdot \frac{C}{A}$$

zu bilden ist, welches man durch die Buchstaben C', A', B' der zweiten Ternion in derselben Reihenfolge genommen auszufüllen hat. Ebenso bildet man für das Dreieckschnittsverhältniss $(AB'C, C'A'B)$ das Schema

$$\frac{A}{B'} \cdot \frac{B'}{C} \cdot \frac{C}{A}$$

und füllt dasselbe durch C', A', B aus, wodurch man

$$\frac{AC'}{C'B'} \cdot \frac{B'A'}{A'C} \cdot \frac{CB}{BA}$$

erhält. In demselben sind A, B', C als Endpunkte der Strecken AB', $B'C$, CA und C', A', B resp. als Schnittpunkte der letzteren anzusehen.

Es ist mit Hülfe der eben gezeigten Uebertragung leicht zu übersehen, dass die Ausdrücke

$$(ABC, C'A'B'),$$
$$(BCA, A'B'C'),$$
$$(CAB, B'C'A')$$

dasselbe Dreieckschnittsverhältniss andeuten; denn jedes stellt das Product der Verhältnisse

$$\frac{AC'}{C'B}, \quad \frac{BA'}{A'C}, \quad \frac{CB'}{B'A}$$

nur in verwechselter Reihenfolge dar. Versetzt man also in dem symbolischen Ausdrucke eines Dreieckschnittsverhältnisses die Buchstaben jeder Ternion für sich und auf gleiche Weise ohne den Sinn oder die Richtung ihrer cyclischen Aufeinanderfolge zu verändern, so bleibt der Werth des Dreieckschnittsverhältnisses derselbe.

Da ferner

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = \frac{B'C}{CA'} \cdot \frac{A'B}{BC'} \cdot \frac{C'A}{AB'}$$

oder

$$(ABC, C'A'B') = (B'A'C', CBA)$$

ist, so kann man auch ohne den Werth eines Dreieckschnittsverhältnisses zu ändern die Reihenfolge aller sechs Buchstaben seines symbolischen Ausdrucks in die entgegengesetzte verwandeln. In Verbindung mit der vorhergehenden Bemerkung ergiebt sich hieraus, dass folgende 6 Ausdrücke

$$(ABC, C'A'B'), (BCA, A'B'C'), (CAB, B'C'A'),$$
$$(A'C'B', BAC), (B'A'C', CBA), (C'B'A', ACB)$$

ein und dasselbe Dreieckschnittsverhältniss bedeuten.

[illegible]

[illegible] Analogie in der Bezeichnung der Doppelverhältnisse [illegible] das Dreieckschnittsverhältniss

$$\frac{AC' \cdot BA' \cdot CB'}{C'B \cdot A'C \cdot B'A}$$

[illegible] Ausdruck

$$(ABC, C'A'B')$$

[illegible] welcher so zu verstehen und zu übersetzen ist, [illegible] Buchstaben A, B, C (die erste Ternion) dessel[illegible] bezeichnen, welche als Endpunkte der getheil[illegible] wobei die Strecken durch die cy[illegible] der drei Buchstaben A, B, C als

AB, BC, CA

[illegible] die drei letzten Buchstaben (die zweite [illegible] Reihe nach die Schnittpunkte der durch die [illegible] Abschnitte AB, BC, CA bedeuten: so dass [illegible] B, BC in BA' und $A'C$ und [illegible] aus welchen Abschnitten das Product [illegible]

[illegible] ähnliche Form des Dreieckschnittsverhältnisses herge[illegible] [illegible] des Ausdrucks [illegible] der erste [illegible] Ternion [illegible]

zu bilden ist, welches man durch die Buchstaben C', A', B' der zweiten Ternion in derselben Reihenfolge genommen auszufüllen hat. Ebenso bildet man für das Dreieckschnittsverhältniss $(AB'C, C'A'B)$ das Schema

$$\frac{A}{B'} \cdot \frac{B'}{C} \cdot \frac{C}{A}$$

und füllt dasselbe durch C', A', B aus, wodurch man

$$\frac{AC'}{C'B'} \cdot \frac{B'A'}{A'C} \cdot \frac{CB}{BA}$$

erhält. In demselben sind A, B', C als Endpunkte der Strecken $AB', B'C, CA$ und C', A', B resp. als Schnittpunkte der letzteren anzusehen.

Es ist mit Hülfe der eben gezeigten Uebertragung leicht zu übersehen, dass die Ausdrücke

$$(ABC, C'A'B'),$$
$$(BCA, A'B'C'),$$
$$(CAB, B'C'A')$$

dasselbe Dreieckschnittsverhältniss andeuten; denn jedes stellt das Product der Verhältnisse

$$\frac{AC'}{C'B}, \quad \frac{BA'}{A'C}, \quad \frac{CB'}{B'A}$$

nur in verwechselter Reihenfolge dar. Versetzt man also in dem symbolischen Ausdrucke eines Dreieckschnittsverhältnisses die Buchstaben jeder Ternion für sich und auf gleiche Weise ohne den Sinn oder die Richtung ihrer cyclischen Aufeinanderfolge zu verändern, so bleibt der Werth des Dreieckschnittsverhältnisses derselbe.

Da ferner

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = \frac{B'C}{CA'} \cdot \frac{A'B}{BC'} \cdot \frac{C'A}{AB'}$$

oder $$(ABC, C'A'B') = (B'A'C', CBA)$$

ist, so kann man auch ohne den Werth eines Dreieckschnittsverhältnisses zu ändern die Reihenfolge aller sechs Buchstaben seines symbolischen Ausdrucks in die entgegengesetzte verwandeln. In Verbindung mit der vorhergehenden Bemerkung ergiebt sich hieraus, dass folgende 6 Ausdrücke

$$(ABC, C'A'B'), (BCA, A'B'C'), (CAB, B'C'A'),$$
$$(A'C'B', BAC), (B'A'C', CBA), (C'B'A', ACB)$$

und dasselbe Dreieckschnittsverhältniss bedeuten.

Man kann somit in dem symbolischen Ausdrucke eines Dreieckschnittsverhältnisses jeden der sechs Buchstaben zum Anfangsbuchstaben machen (vergl. §. 27 I.). Die Schneidepunkte kann man, wie die drei letzten Ausdrücke zeigen, als die Endpunkte der Strecken $A'C'$, $C'B'$, $B'A'$ und die frühern Endpunkte in der Reihenfolge B, A, C als die Schneidepunkte dieser Strecken ansehen.

Endlich sei noch bemerkt, dass der symbolische Ausdruck $(ABC, C'A'B')$ leicht in das oben angeführte negative Verhältniss zweier Doppelverhältnisse umgesetzt werden kann. Man bilde nämlich aus der ersten Ternion das Schema

$$\frac{(AB}{CA)},$$

indem man den ersten Buchstaben A zweimal, als oberen ersten und als untern letzen setzt, wie es die cyclische Aufeinanderfolge der Buchstaben andeutet, und fülle dasselbe durch die Buchstaben der zweiten Ternion nach dem Schema

$$\frac{C'A')}{(A'B'},$$

aus, in welchem ebenfalls die cyclische Reihenfolge beibehalten aber der mittlere Buchstabe A' zweimal gesetzt worden ist. Dem vervollständigten Ausdrucke ist dann noch das Zeichen (—) vorzusetzen. Man erhält somit die identischen Ausdrücke

$$(ABC, C'A'B') = -\frac{(ABC'A')}{(A'B'CA)},$$

$$(BCA, A'B'C') = -\frac{(BCA'B')}{(B'C'AB)},$$

$$(CAB, B'C'A') = -\frac{(CAB'C')}{(C'A'BC)} \text{ u. s. w.}$$

Daraus ist leicht noch abzunehmen, dass umgekehrt das Verhältniss oder der Quotient zweier Doppelverhältnisse in ein Dreieckschnittsverhältniss übergeht, wenn in den symbolischen Ausdrücken der Doppelverhältnisse der erste und letzte Buchstabe des einen mit dem letzten und ersten des andern identisch ist, oder wenn man nach §. 27 die Ausdrücke derselben ohne den Werth des Verhältnisses zu ändern in diese Formen bringen kann. So giebt z. B.

$$\frac{(ABCC')}{(B'CBA')} = \frac{(BAC'C)}{(CB'A'B)}$$

die Formen

$$\frac{BA}{A'B} \text{ und } \frac{C'C}{CB'},$$

folglich

$$(ABCC') : (B'CBA') = -(BAA', C'CB').$$

Alle die für das Dreieckschnittsverhältniss im Allgemeinen gemachten Bemerkungen gelten natürlich auch für den besondern Fall, dass der Werth desselben $= -1$ ist, d. h. wenn die drei Paare von Punkten A und A', B und B', C und C' in Involution sind. (§. 66 a — d.)

Sowie also das allgemeine Doppelverhältniss zwischen vier Punkten einer Graden in das harmonische Verhältniss übergeht, wenn der Werth desselben der negativen Einheit gleich wird, ebenso kann das involutorische Verhältniss zwischen 6 Punkten einer Graden als dasjenige Dreiekschnittsverhältniss, dessen Werth der negativen Einheit gleichkommt, bezeichnet werden, und es drückt demnach die symbolische Gleichung

$$(ABC, C'A'B') = -1$$

das involutorische Verhalten von drei Paaren zugeordneter Punkte A und A', B und B', C und C' aus.

§. 69.

Zusammenstellung der bisherigen Involutionsgleichungen. Aus §. 67 und mit Berücksichtigung der eben festgestellten symbolischen Bezeichnungen ergiebt sich, dass, wenn drei Paare von Punkten A und A', B und B', C und C' in Involution sind, folgende sieben Gleichungen gelten und dass umgekehrt jede dieser Gleichungen die Involution in zureichender Weise bestimmt und die übrigen sechs Gleichungen involvirt:

$$\text{A)} \quad \begin{cases} \dfrac{(AA'BC)}{(A'AB'C')} = \dfrac{(AA'B'C)}{(A'ABC')} = 1, \\ \dfrac{(BB'CA)}{(B'BC'A')} = \dfrac{(BB'C'A)}{(B'BCA')} = 1, \\ \dfrac{(CC'AB)}{(C'CA'B')} = \dfrac{(CC'A'B)}{(C'CAB')} = 1, \end{cases}$$

$$\text{B)} \quad \begin{cases} (ABC, C'A'B') = -1, \\ (A'BC, C'AB') = -1, \\ (AB'C, C'A'B) = -1, \\ (ABC', CA'B') = -1. \end{cases}$$

Man kann somit in dem symbolischen Ausdrucke eines Dreieckschnittsverhältnisses jeden der sechs Buchstaben zum Anfangsbuchstaben machen (vergl. §. 27 I.). Die Schneidepunkte kann man, wie die drei letzten Ausdrücke zeigen, als die Endpunkte der Strecken AC', $C'B'$, $B'A$ und die frühern Endpunkte in der Reihenfolge B, A, C als die Schneidepunkte dieser Strecken ansehen.

Endlich sei noch bemerkt, dass der symbolische Ausdruck $(ABC, C'AB')$ leicht in das oben angeführte negative Verhältniss zweier Doppelverhältnisse umgesetzt werden kann. Man bilde nämlich aus der ersten Ternion das Schema

$$\frac{(AB}{CA)},$$

indem man den ersten Buchstaben A zweimal, als oberen ersten und als untern letzen setzt, wie es die cyclische Aufeinanderfolge der Buchstaben andeutet, und fülle dasselbe durch die Buchstaben der zweiten Ternion nach dem Schema

$$\frac{C'A)}{(AB'},$$

aus, in welchem ebenfalls die cyclische Reihenfolge beibehalten aber der mittlere Buchstabe A zweimal gesetzt worden ist. Dem vervollständigten Ausdrucke ist dann noch das Zeichen (—) vorzusetzen. Man erhält somit die identischen Ausdrücke

$$(ABC, C'AB') = -\frac{(ABC'A)}{(A'B'CA)},$$

$$(BCA, AB'C') = -\frac{(BCA'B')}{(B'C'AB)},$$

$$(CAB, B'C'A) = -\frac{(CAB'C')}{(C'ABC)} \text{ u. s. w.}$$

Daraus ist leicht noch abzunehmen, dass umgekehrt das Verhältniss oder der Quotient zweier Doppelverhältnisse in ein Dreieckschnittsverhältniss übergeht, wenn in den symbolischen Ausdrücken der Doppelverhältnisse der erste und letzte Buchstabe des einen mit dem letzten und ersten des andern identisch [illegible]t, oder wenn man nach §. 27 die Ausdrücke derselben ohne d[illegible]h des Verhältnisses zu ändern in diese Formen bringen [illegible] giebt z. B. die Formen

$$\frac{(ABCC')}{(B'CBA)} = \frac{(BAC}{(CB'}$$

rsel-
eich-

nkte-
henden
ann im
etracht,
mit Be-
Lage der
desselben

gleich-
er beide
die eine



Die drei letzten Ausdrücke unter B) ergeben sich aus der ersten durch Vertauschung der Punkte A, B, C mit ihren zugeordneten A', B', C' und entsprechen den Gleichungen b), a), c) in §. 67, während der erste der symbolische für d) ist.

§. 70.

Noch andere die Involution bezeichnende Ausdrücke. 1) Insofern die Involution von sechs Punkten einer Graden auf der Gleichheit zweier Doppelverhältnisse zwischen je vier entsprechenden Punkten beruht, kann dieselbe noch auf verschiedene andere Weisen ausgedrückt werden, wenn man von den beiden gleichen Doppelverhältnissen das eine in den complementären Ausdruck verwandelt (§. 27 III.). So ergiebt sich aus der ersten Gleichung unter A), d. i. aus

$$(AA'BC) = (A'AB'C')$$

$$(AA'BC) + (A'B'AC') = 1,$$

oder

C) $$\frac{AB\,.\,A'C}{A'B\,.\,AC} + \frac{AA'\,.\,B'C'}{AB'\,.\,A'C'} = 1.$$

Nimmt man von dem ersteren der beiden gleichen Doppelverhältnisse das complementäre, so kommt

$$(A'AB'C') + (ABA'C) = 1$$

oder

C') $$\frac{A'B'\,.\,AC'}{AB'\,.\,A'C'} + \frac{A'A\,.\,BC}{AB'\,.\,AC} = 1.$$

Ebenso können die übrigen 5 Gleichungen unter A) umgeformt werden.

2) Desgleichen erhält man aus den Gleichungen B), nachdem man sie in Doppelverhältnisse umgeformt hat, noch andere für die Involution charakteristische Ausdrücke. So giebt z. B. die vierte

$$(ABC',\, CA'B') = -1,$$

$$(ABCA') = (A'B'C'A),$$

mithin $$(ABCA') + (A'C'B'A) = 1,$$

oder

D) $$A'A = \frac{A'B\,.\,AC}{BC} + \frac{A'B'\,.\,AC'}{B'C'}$$

Nimmt man dagegen vom ersten der beiden gleichen Doppelverhältnisse das complementäre, wodurch man

$$(ACBA') + (A'B'C'A') = 1$$

erhält, so ergiebt sich

$$\text{D}')\qquad AA' = \frac{AB \,.\, A'C}{BC} + \frac{AB' \,.\, A'C'}{B'C'}.$$

3) Die Gleichungen B) geben noch mehrere andere, den Gleichungen D) analoge Ausdrücke der Involution. So folgt z. B. aus der ersten Gleichung unter B), oder aus

$$AC' \,.\, BA' \,.\, CB' = - C'B \,.\, A'C \,.\, B'A,$$

wenn man in derselben

$$CA + AB' \text{ für } CB', \quad A'B + BC \text{ für } A'C$$

einsetzt und dann durch $AB' \,.\, BA'$ dividirt:

$$AC'\left(\frac{CA}{AB'} + 1\right) = - C'B\left(1 + \frac{BC}{A'B}\right), \text{ mithin}$$

$$\text{E})\qquad AC' + C'B = AB = \frac{AC \,.\, AC'}{AB'} + \frac{BC \,.\, BC'}{A'B}.$$

Ebenso erhält man durch Einsetzen von

$$AB + BC' \text{ für } AC' \text{ und } B'C + CA \text{ für } B'A:$$

$$\text{E}')\qquad BC = \frac{BA \,.\, BA'}{BC'} + \frac{CA \,.\, CA'}{B'C},$$

und durch Einsetzen von

$$BC + CA' \text{ für } BA', \quad C'A + AB \text{ für } C'B:$$

$$\text{E}'')\qquad CA = \frac{CB \,.\, CB'}{CA'} + \frac{AB \,.\, AB'}{C'A}.$$

In ähnlicher Weise ergeben sich noch Ausdrücke von derselben Form für AB', $A'B$, $A'B'$, BC' ... etc. aus den übrigen Gleichungen unter B).

§. 71.

Lagenverhältnisse von drei involutorischen Punktepaaren. Die gegenseitige Lage von drei in Involution stehenden Paaren zugeordneter Punkte A und A', B und B', C und C' kann im Allgemeinen sehr mannigfaltig sein; doch lässt sich in Betracht, dass die Involution die Gleichungen A) §. 69 bedingt, und mit Berücksichtigung dessen, was §. 26 über die gegenseitige Lage der vier Punkte eines Doppelverhältnisses und den Werth desselben bemerkt worden ist, Folgendes festsetzen.

Liegen bezüglich der Strecke AA' die Punkte B und B' gleichartig, d. h. sind dieselben entweder beide innere, oder beide äussere der Strecke AA' (liegt von den Strecken AA', BB' die eine

entweder ganz innerhalb oder ganz ausserhalb der andern); so sind die Verhältnisse $\frac{AB}{BA'}$, $\frac{A'B'}{B'A}$ einstimmig (beide zugleich entweder positiv oder negativ). Hieraus und aus der Bedingungsgleichung für die Involution

$$\frac{(AA'BC)}{(A'AB'C')}=1$$

geht hervor, dass auch die Verhältnisse $\frac{AC}{CA'}$, $\frac{A'C'}{C'A}$ einstimmig, oder dass auch die Punkte C und C' bezüglich der Strecke AA' gleichartig sind. Weil ferner

$$\frac{(BB'CA)}{(B'BC'A')}=1,$$

und die Verhältnisse $\frac{BA}{AB'}$, $\frac{B'A'}{A'B}$ einstimmig sind nach derselben Voraussetzung, dass A und A' bezüglich der Strecke BB' gleichartige Punkte sind; so müssen die Verhältnisse $\frac{BC}{CB'}$, $\frac{B'C'}{C'B}$ ebenfalls einstimmig, also die Punkte C und C' bezüglich der Strecke BB' gleichartig sein.

Ist also von drei in Involution stehenden Paaren zugeordneter Punkte eines derselben gleichartig bezüglich der Strecke zwischen zwei andern zugeordneten Punkten, so ist **jedes** Paar gleichartig bezüglich **jeder** der beiden andern Strecken zugeordneter Punkte.

Auf dieselbe Weise ergiebt sich, dass wenn irgend ein Paar zugeordneter Punkte ungleichartig bezüglich der Strecke eines andern Paares ist, dasselbe auch der Fall ist mit **jedem** Paare bezüglich **jeder** Strecke zwischen zwei zugeordneten Punkten.

In letzterem Falle liegen die Strecken AA', BB', CC' zwischen zugeordneten Punkten theilweise aufeinander oder, wie man auch sagt, greifen in einander ein, bilden also beispielsweise die Reihenfolge $ABCA'B'C'$.

§. 72.

Involution zwischen mehr als drei Punktepaaren einer Graden. Sind drei Punktepaare A und A', B und B', C und C' in Involution und ist auch ein viertes Paar D und D' mit A und A', B und B' in Involution, so ist dasselbe auch mit C und C'

und jedem der beiden ersten Paare in Involution. Denn nach der Voraussetzung ist

$$(AA'BC) = (A'AB'C')$$

und $$(AA'BD) = (A'AB'D'),$$

woraus unmittelbar nach §. 31 folgt

$$(AA'CD) = (A'AC'D'),$$

d. h. die Punktenpaare A und A', C und C', D und D' sind in Involution.

Offenbar lässt sich der Satz auch auf ein fünftes und noch weiteres Paar zugeordneter Punkte ausdehnen, so dass im Allgemeinen der Lehrsatz gilt:

Hat man auf einer Graden mehrere Punktepaare, von denen zwei mit jedem der andern Paare eine Involution bilden, so stehen auch jede beliebige drei dieser Paare unter sich in Involution.

§. 73.

Centralpunkt der Involution. Die Gleichungen in §. 69 geben zu erkennen, dass von sechs Punkten in Involution jeder derselben durch die fünf andern bestimmt ist. Unter Umständen, die näher erörtert werden sollen, kann nun der durch die fünf übrigen bestimmte sechste Punkt besondere oder singuläre Lage erhalten, wofür zwei Fälle besonders hervorzuheben sind.

I. Nimmt man an, dass von den drei involutorischen Punktepaaren A und A', B und B', C und C' der Punkt C' der unendlich ferne Punkt der Graden ist, in welchem Falle sein zugeordneter C der Centralpunkt genannt wird und mit O bezeichnet werden mag, so vereinfachen sich die Gleichungen der Involution in §. 69 auf folgende

$$\text{A*)} \quad \begin{cases} \dfrac{OA}{OA'} = \dfrac{AB \,.\, AB'}{A'B \,.\, A'B'} \\[2mm] \dfrac{OB}{OB'} = \dfrac{BA \,.\, BA'}{B'A \,.\, B'A'} \\[2mm] OA \,.\, OA' = OB \,.\, OB' \end{cases}$$

$$\text{B*)} \quad \begin{cases} \dfrac{OA'}{OB'} = \dfrac{BA'}{AB'}, \quad \dfrac{OA}{OB'} = \dfrac{BA}{A'B'}; \\[2mm] \dfrac{OA'}{OB} = \dfrac{B'A'}{AB}; \quad \dfrac{OA}{OB} = \dfrac{B'A}{A'B}. \end{cases}$$

Denn jedes der in §. 69 unter *A*) aufgeführten Doppelverhältnisse, welches den unendlich fernen Punkt C' enthält, wird auf ein einfaches Verhältniss, und jedes der unter B) aufgestellten Dreieckschnittsverhältnisse wird auf ein Product zweier einfachen Verhältnisse, dessen Werth $= +1$ ist, zurückgeführt (§. 26 und 40).

Dass von jeder dieser Gleichungen auch rückwärts auf die Involution der Punkte *A* und A', *B* und B', *O* zu schliessen ist, erhellt schon aus der Art und Weise, wie sich die Gleichungen *A*) und *B*) in §. 69 durch Voraussetzung eines unendlich fernen Punktes C' auf die Gleichungen *A**) und *B**) vereinfacht haben, sowie daraus, dass durch Einführung eines unendlich fernen Punktes jedes einfache Verhältniss in ein Doppelverhältniss umgesetzt werden kann. So folgt z. B. aus der ersten Gleichung unter *B**), welche man auch

$$\frac{BA'}{A'O} \cdot \frac{OB'}{B'A} = 1$$

schreiben kann, nach Einführung des unendlich fernen Punktes O'

$$\frac{BA'}{A'O} \cdot \frac{OB'}{B'O} \cdot \frac{AO'}{O'B} = -1,$$

d. i. $(BOA, A'B'O')$, oder $(ABO, O'A'B') = -1$:

eine Gleichung, welche die Involution der Punktepaare *A* und A', *B* und B', *O* und O' anzeigt.

Desgleichen muss gemäss der Bildungsweise der Gleichungen A*) und B*) aus A) und B) jede Gleichung des ersteren Systems sich aus irgend einer andern desselben Systems ableiten lassen. So folgt z. B. aus der dritten von *A**), die sich auch schreiben lässt

$$OA : OB = OB' : OA',$$

$$OA - OB : OB' - OA' = OA : OB' = OB : OA',$$

oder

$$\frac{BA}{A'B'} = \frac{OA}{OB'} = \frac{OB}{OA'},$$

d. i. die zweite und dritte Gleichung unter B*).

Ebenso folgt aus

$$OA : OB' = OB : OA'$$

$$\frac{B'A}{A'B} = \frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'},$$

d. i. die vierte und erste unter B*).

Endlich folgt aus der dritten unter *A**) auch

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB \cdot OB'}{OA' \cdot OA'}, \quad \frac{OB}{OB'} = \frac{OA \cdot OA'}{OB' \cdot OB'},$$

oder mit Benutzung der eben gefundenen vier Gleichungen

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{AB \, . \, AB'}{A'B \, . \, A'B'}, \quad \frac{OB}{OB'} = \frac{BA \, . \, BA'}{B'A \, . \, B'A'},$$

d. i. die erste und zweite Gleichung unter A*).

§. 74.

Lage des Centralpunktes. Die Gleichung $OA \, . \, OA = OB \, . \, OB'$ zeigt, dass der Punkt O in Bezug auf die Strecken AA' und BB' gleichartig (d. h. für beide Strecken zugleich entweder ein innerer oder ein äusserer) sein muss.

Ist nun das eine Punktepaar A, A' ungleichartig bezüglich der Strecke BB' des andern Paares, oder greifen die Strecken in einander ein, so muss auch das Punktepaar O, O' ungleichartig bezüglich AA' und BB' liegen (§. 71), und da O' immer ein äusserer Punkt gegen jede endliche Strecke AA' oder BB' sein wird, so muss O ein innerer für beide Strecken sein, d. h. auf dem ihnen gemeinschaftlichen Abschnitte liegen.

Ist aber die eine Strecke z. B. AA' ganz innerhalb der andern BB' enthalten, wobei jedes Punktenpaar gleichartig bezüglich der Strecke des andern ist, so muss O, damit er auch mit O' gleichartig bezüglich beider Strecken sei, ausserhalb derselben liegen.

Ist endlich jede der Strecken AA', BB' ausserhalb der andern gelegen, so muss aus demselben Grunde auch O ausserhalb derselben und zwar auf dem zwischen ihnen befindlichen Abschnitte liegen, weil andernfalls keine Gleichheit der Producte $OA \, . \, OA'$ und $OB \, . \, OB'$ möglich ist.

§. 75.

Bedeutung des Centralpunktes für drei und mehrere involutorische Punktepaare; dritte Definition der Involution. Die Gleichung $OA . OA' = OB . OB'$ lässt eine einfache geometrische Deutung und Construction zu, nach welcher daher auch zu den Punkten O, A, A', B leicht der fünfte B' bestimmt werden kann. Ebenso kann zu einem sechsten C der siebente C' bestimmt werden, für welchen man nämlich hat

$$OA \, . \, OA' = OB \, . \, OB' = OC \, . \, OC'.$$

Drei in solcher Beziehung stehende Punktepaare A und A', B und B', C und C' sind dann wieder in Involution.

Denn es folgt aus diesen Bedingungsgleichungen nach §. 69 B*)

$$\frac{OA'}{OB'} = \frac{BA'}{AB'}; \quad \frac{OB'}{OC'} = \frac{CB'}{BC'}; \quad \frac{OC'}{OA'} = \frac{AC'}{CA'};$$

und durch Multiplication dieser drei Gleichungen mit einander:

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = -1,$$

welches eine die Involution von A und A', B und B', C und C' bezeichnende Gleichung ist.

Der Satz gilt auch umgekehrt. Denn ist $(ABC,\ C'A'B') = -1$, so kann man erstlich zu A und A', B und B' einen Punkt O bestimmen, der, dem unendlich fernen zugeordnet, mit den beiden Punktepaaren in Involution ist und für welchen nach §. 73 $OA.OA' = OB.OB'$ ist. Bestimmt man sodann zu O, A, A', B, B' und C einen siebenten Punkt C'' gemäss der Relation $OA.OA' = OB.OB' = OC.OC''$, so ist $(ABC,\ C''A'B') = -1$. Weil aber nach der Voraussetzung auch $(ABC,\ C'A'B') = -1$ ist, so muss C'' mit C' zusammenfallen; d. h. die drei involutorischen Punktepaare haben nur Einen Centralpunkt.

Hieraus ist folgende (dritte) Definition der Involution abzuleiten:

Drei (und mehrere) Paare von Punkten einer Graden sind in Involution, wenn für jedes Paar das Product der Abstände seiner Punkte von einem und demselben Punkte O der Graden (selbstverständlich mit Berücksichtigung der Vorzeichen) eine constante Grösse ist.

Der für die Involution dieser Paare besonders ausgezeichnete Punkt O ist auch deshalb mit dem besondern Namen des **Centralpunktes** der Involution belegt worden.

Nach dem Vorhergehenden ist der Centralpunkt selbst ein Punkt der Involution, dessen zugeordneter der unendlich ferne Punkt der Graden ist.

§. 76.

Lehrsätze. Legt man durch die Punkte A und A', B und B' zwei beliebige Kreise, welche sich schneiden, so geht ihre gemeinschaftliche Sehne durch den Centralpunkt O der Punktepaare A und A', B und B'.

Denn ist G der eine Durchschnittspunkt der beiden Kreise, so mag die Grade OG zum zweiten Male den einen Kreis in G', den andern in G'' schneiden. Demgemäss hat man

$$OG \,.\, OG' = OA \,.\, OA' \text{ und } OG \,.\, OG'' = OB \,.\, OB'$$

und in Folge der Eigenschaften des Centralpunktes

$$OA \,.\, OA' = OB \,.\, OB',$$

folglich $$OG' = OG'',$$

sowohl nach Grösse als Richtung, d. h. die Punkte G' und G'' fallen zusammen, und die gemeinschaftliche Sehne der beiden etc.

Hieraus folgt: 1) Drei Kreise, welche jeder durch eins der involutorischen Punktepaare A und A', B und B', C und C', sowie durch einen und denselben beliebigen Punkt G der Ebene hindurchgehen, haben noch einen zweiten Punkt G' mit einander gemein, und ihre gemeinschaftliche Sehne GG' geht durch den Centralpunkt der Involution. Der Satz gilt offenbar auch umgekehrt.

2) Für den Fall, dass jedes Punktepaar ungleichartig bezüglich der Strecke eines andern Paares ist, oder dass die involutorischen Abschnitte in einander eingreifen (§. 62), gehen die über diesen Abschnitten als Durchmessern beschriebenen drei Kreise durch dieselben zwei Punkte, ihre gemeinschaftliche Sehne geht durch den Centralpunkt der Involution und ist die gemeinschaftliche kürzeste Sehne für die drei Kreise.

3) Je zwei Grade, die von einem der gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte der drei letztgenannten Kreise nach den Endpunkten eines involutorischen Abschnittes oder Durchmessers gezogen sind, stehen auf einander senkrecht; folglich, wenn drei involutorische Abschnitte in einander eingreifen, so giebt es zwei Punkte der Ebene, von denen aus jeder Abschnitt unter einem rechten Winkel erscheint.

Dreht sich also ein rechter Winkel um seinen Scheitel, so sind die sechs Durchschnittspunkte, welche seine Schenkel in drei beliebigen Lagen mit einer festen Graden bestimmen, in Involution.

4) In dem Falle jedoch, dass von drei involutorischen Punktepaaren ein jedes gleichartig bezüglich der Abschnitte der andern ist, so dass je zwei Kreise, welche diese Abschnitte zu Durchmessern haben, entweder ganz in einander oder ganz ausser einander liegen, ohne sich zu schneiden (§. 71), sind die vom Centralpunkt der Involution aus gezogenen Tangenten an die drei Kreise von gleicher Länge.

Anmerkung. Eine gemeinschaftliche Sehne der drei Kreise ist in dem letztern Falle nicht vorhanden, oder ist, wie man zu sagen pflegt, imaginär, wird aber vertreten durch eine auf der Centrallinie der Kreise senkrechte und durch den Centralpunkt der Involution gehende Grade (gemeinschaftliche Potenzlinie, Chordale, *axe radical*), von welcher übrigens jeder Punkt die Eigenthümlichkeit besitzt, dass sich von ihm aus gleiche Tangenten an die drei Kreise ziehen lassen.

§. 77.

Bestimmung des Centralpunktes. Der erste Satz des vorhergehenden §. giebt zugleich eine Construction des Centralpunktes an. Zur Bestimmung desselben sind zwei Punktepaare A und A', B und B' hinreichend.

1) Durch einen beliebigen Punkt G der Ebene legt man zwei Kreise, von denen der eine noch durch A und A', der andere durch B und B' geht, und welche sich noch in einem zweiten Punkte G' schneiden. Die gemeinschaftliche Sehne GG' geht dann durch den Centralpunkt.

Greifen die involutorischen Abschnitte in einander ein, so kann man kürzer nach 4 des vor. §. über AA' und BB' als Durchmessern zwei Kreise ziehen, deren gemeinschaftliche Sehne durch den Centralpunkt geht.

2) Eine zweite allgemeine Bestimmung des Centralpunktes gründet sich auf die Gleichung

$$\frac{OA}{OB}=\frac{AB'}{BA'} \text{ (§. 73, B*).}$$

Legt man durch die Punkte A und B zwei Parallelen AB_1 und BA_1, die resp. den Abschnitten AB' und BA' gleich sind und gleiche oder entgegengesetzte Richtung haben, je nachdem dasselbe mit den Abschnitten AB' und BA' der Fall ist, und zieht hierauf die Grade A_1B_1, so schneidet dieselbe die Grade $ABA'B'$ in dem Centralpunkte O.

3) Bestimmungen des Centralpunktes durch andere Constructionselemente, wie sie in der Folge noch vorkommen, geben folgende Gleichungen an die Hand. Aus

$$\frac{OA}{OB}=\frac{AB'}{BA'} \text{ folgt } \frac{OA}{OB-OA}=\frac{AB'}{BA'-AB'},$$

oder

$$\frac{OA}{AB}=\frac{AB'}{BA'+B'A} \text{ und } AO=\frac{AB.AB'}{AB'+A'B}.$$

Sind M und N die Mitten der Abschnitte AA' und BB', so hat man mit Berücksichtigung von §. 6

$$AO = \frac{AB \, . \, AB'}{2\,MN};$$

ebenso erhält man

$$A'O = \frac{A'B \, . \, A'B'}{2\,MN}$$

und, weil $2\,MO = AO + A'O$ ist,

$$MO = \frac{AB . AB' + A'B . A'B'}{4\,MN}.$$

Die geometrische Deutung und Construction der drei letzten Gleichungen hat keine Schwierigkeiten.

§. 78.

Doppelpunkte der Involution. Ausser der in §. 73 gemachten Voraussetzung kann man ferner annehmen, dass die beiden Punkte C und C', welche mit A und A', B und B' in Involution sind, in einen Punkt E zusammenfallen; alsdann gehen die Gleichungen in §. 69 über in

$$\text{A}^{**} \quad \begin{cases} (AA'BE)\,(AA'B'E) = 1 \text{ oder } \dfrac{AB}{BA'} \cdot \dfrac{AB'}{B'A'} = \left(\dfrac{AE}{EA'}\right)^2, \\ (BB'AE)\,(BB'A'E) = 1 \text{ oder } \dfrac{BA}{AB'} \cdot \dfrac{BA'}{A'B'} = \left(\dfrac{BE}{EB'}\right)^2, \end{cases}$$

$$\text{B}^{**} \quad \begin{cases} (ABE,\, EA'B') = -1, \\ (A'BE,\, BAB') = -1. \end{cases}$$

Die erste und vierte der Gleichungen B in §. 69 werden nämlich identisch, wenn C und C' in dem Punkte E vereinigt sind, und die dritte Gleichung ist die reciproke der zweiten, kann also durch dieselbe vertreten werden.

Zu bemerken ist noch, dass die beiden unter B** aufgestellten Gleichungen auch durch folgende Ausdrücke wiedergegeben werden können:

$$(AA'E,\, EBB') = (A'AE,\, EB'B) = 1,$$
$$(AA'E,\, EB'B) = (A'AE,\, EBB') = 1.$$

Die Gleichungen A** zeigen, insofern sie vom zweiten Grade sind, unmittelbar, dass es zwei verschiedene Punkte E giebt, von denen jeder als ein sich selbst entsprechender Punkt mit den Punktepaaren A und A', B und B' eine Involution bildet. Sie wer-

den die Doppelpunkte der Involution genannt, und sollen in der Folge immer mit den Buchstaben E und F bezeichnet werden. Ihre merkwürdigsten Eigenschaften und Beziehungen geben die nächstfolgenden §§. an.

§. 79.

Harmonie der Doppelpunkte mit den involutorischen Punktepaaren. 1) Aus der ersten Gleichung unter A^{**} folgt

$$\frac{AE}{EA'} = \pm \sqrt{\frac{AB}{BA'} \cdot \frac{AB'}{B'A'}},$$

d. h. die Strecke AA' ist nach einerlei aber entgegengesetztem Verhältniss getheilt. Bezeichnet man die beiden Theilungspunkte mit E und F, so sind dieselben nach §. 43 zwei harmonisch zugeordnete Theilungspunkte der Strecke AA' oder es ist

$$(AA'EF) = -1.$$

Ebenso ergiebt sich aus der zweiten Gleichung unter A**

$$(BB'EF) = -1$$

Folglich: Die beiden Doppelpunkte E und F von denen jeder sich selbst involutorisch entspricht, theilen jeden der involutorischen Abschnitte AA', BB' harmonisch.

Dieser Satz ergiebt sich auch auf folgende Weise: Weil

$$(AA'BE) = (A'AB'E)$$

und ebenso

$$(AA'BF) = (A'AB'F),$$

so folgt nach §. 31

$$(AA'EF) = (A'AEF)$$

d. h. AA' ist in E und F harmonisch getheilt; §. 44.

Sollen die Doppelpunkte E und F reell sein, so muss jedes Paar zugeordneter Punkte A und A' oder B und B' gleichartig bezüglich des vom andern Paare bestimmten Abschnittes BB' oder AA' liegen, weil nur dann die Verhältnissproducte $(AB:BA')$ $(AB':B'A')$ und $(BA:AB')$ $(BA':A'B')$ positive Werthe haben können. Mit andern Worten: die Abschnitte AA', BB' dürfen nicht in einander eingreifen, sondern einer derselben muss entweder ganz innerhalb oder ganz ausserhalb des andern liegen, wenn die Doppelpunkte möglich sein sollen. (vergl. 44).

2) Werden umgekehrt durch zwei Punkte E und F zwei Abschnitte AA' BB' zugleich harmonisch getheilt, so bildet jeder der Punkte E, F, als ein sich selbst entsprechender, mit den Paaren A und A', B und B' eine Involution.

Dann aus der Voraussetzung $(EFAA') = (EFBB') = -1$ folgt nach §. 48

$$\frac{2}{EF} = \frac{1}{EA} + \frac{1}{EA'} \text{ und } \frac{2}{EF} = \frac{1}{EB} + \frac{1}{EB'},$$

mithin

$$\left(\frac{1}{AE} + \frac{1}{EB}\right) = -\left(\frac{1}{A'E} + \frac{1}{EB'}\right),$$

$$\frac{AB}{AE \,.\, EB} = -\frac{A'B'}{A'E \,.\, EB'},$$

$$\frac{A'E}{EB} \cdot \frac{BA}{AE} \cdot \frac{EB'}{B'A'} = -1,$$

oder

$$(A'BE,\ EAB') = -1,$$

welche eine der Gleichungen B** ist. Folglich u. s. w.

3) Hieraus folgt weiter nach §. 73:

Wird ein Abschnitt EF auf drei verschiedene Weisen in den Punkten A und A', B und B', C und C' harmonisch getheilt, so bilden die drei Paar Theilungspunkte eine Involution.

4) Umgekehrt: Sind A und A', B und B', C und C' drei in Involution stehende Punktepaare und lassen sich zu zweien derselben z. B. zu A und A', B und B' die beiden Doppelpunkte E und F bestimmen, welchen jeden der Abschnitte AA', BB' harmonisch theilen, so theilen diese Punkte auch den Abschnitt des dritten Paares CC' harmonisch.

Denn da

$$(ABC,\ C'A'B') = -1$$

$$(ABE,\ EA'B') = (ABF,\ FA'B') = -1, \ (78),$$

so ist auch

$$(BCE,\ EB'C') = (BCF,\ FB'C') = -1, \ (72),$$

folglich theilen E und F den Abschnitt CC' harmonisch.

Da dieses überhaupt für jeden Abschnitt XX' gilt, dessen Endpunkte mit den Punktepaaren A und A', B und B' in Involution sind, so hat man allgemein:

Lassen sich bei irgend einem System involutorischer Punktepaare A und A', B und B', C und C', D und D'... zu irgend zwei Paaren desselben die Doppelpunkte E und F bestimmen, so theilen diese jeden involutorischen Abschnitt harmonisch.

§. 80.

Involution der Doppelpunkte mit vier zu allen möglichen Paaren combinirten Punkten. Die den Punktepaaren A und A', B und B' zugehörigen Doppelpunkte E, F bilden mit den Paaren A und B', A' und B eine Involution.

Denn nach §. 78 ist

$$(ABEA') = (A'B'EA), \quad (ABFA') = (A'B'FA),$$

mithin nach §. 31

$$(ABEF) = (A'B'EF),$$

oder

$$(ABEF) = (B'A'FE),$$

d. h. die Punktepaare A und B', B und A', E und F sind in Involution.

Desgleichen, weil

$$(AA'EF) = (BB'EF) = -1,$$

also

$$(AA'EF) = (BB'FE) \text{ ist,}$$

bilden auch E und F mit den Punktepaaren A und B, A' und B' eine Involution, folglich:

Die zu zwei Paaren zugeordneter Punkte A und A', B und B' gehörigen Doppelpunkte E und F gehören als zugeordnete Punkte noch zwei verschiedenen Involutionen an, die man erhält, wenn man die Punkte A, A', B, B' auf die beiden **einzig noch möglichen** Weisen zu Paaren, nämlich zu A und B, A' und B', sowie zu A und B', A' und B verbindet.

Da hiermit die Fälle für die Verbindung der Punkte A, B, B', B', zu Paaren erschöpft sind, so lässt sich der Satz auch umkehren.

§. 81.

Der Centralpunkt halbirt den Abschnitt zwischen den beiden Doppelpunkten.

Da nämlich die Punkte E und F jeder als sich selbst zugeord-

net mit den Punktepaaren A und A', B, und B' in Involution ist, so hat man (§. 75)

$$OA \,.\, OA' = OB \,.\, OB' = \overline{OE}^2 = \overline{OF}^2,$$

folglich

$$OE = -OF \text{ oder } EO = OF.$$

Die Abschnitte EO und OF müssen mit entgegengesetzten Zeichen versehen werden, weil sonst die Doppelpunkte E und F in einen Punkt zusammenfallen würden.

Auch die Relation $OA \,.\, OA' = \overline{OE}^2 = \overline{OF}^2$ zeigt, dass die Doppelpunkte imaginär sind, wenn der Centralpunkt O auf den Abschnitten AA', BB' selbst liegt, d. h. wenn AA' und BB' in einander eingreifen (vergl. §. 79).

§. 82.

Symmetrische Involution zwischen Punkten einer Graden. Man kann noch die speciellere Annahme machen, dass einer der beiden Punkte E, F z. B. der erstere der unendlich ferne Punkt der Graden sei. Alsdann gehen die Gleichungen des §. 78 über in

$$AB \,.\, AB' = A'B \,.\, A'B';$$
$$BA \,.\, BA' = B'A \,.\, B'A';$$
$$AB' = BA';\; AB = B'A'.$$

Dieselben Gleichungen erhält man auch, wenn man den Punkt F als die gemeinschaftliche Mitte der Abschnitte AA', BB' annimmt, und es geht aus denselben hervor, dass von den Abschnitten AA', BB' der eine ganz auf dem andern liegt, sowie dass beide einen und denselben Mittelpunkt haben, welches der dem unendlich fernen E zugeordnete Punkt F ist, und von dem aus jedes Punktepaar symmetrisch liegt.

Umgekehrt stehen die Endpunkte zweier auf einander symmetrisch liegender Abschnitte AA', BB' in Involution sowohl mit ihrem gemeinschaftlichen Mittelpunkte F als einem sich selbst entsprechenden Punkte, als auch mit dem unendlich fernen Punkte E der Graden, gleichfalls als einem sich selbst entsprechenden Punkte. Denn in Folge der vorausgesetzen symmetrischen Lage gilt jede der obigen Gleichungen, von denen z. B. die erste auch unter der Form

$$\frac{AB}{BA'} = \frac{A'B'}{B'A}$$

geschrieben werden kann. Da nun

$$\frac{AF}{FA'} = 1 \text{ und } \frac{AE}{EA'} = -1,$$

so ist auch

$$\frac{AB}{BA'} : \frac{AF}{FA'} = \frac{A'B'}{B'A} : \frac{A'F}{FA} \text{ und } \frac{AB}{BA'} : \frac{AE}{EA'} = \frac{A'B'}{B'A} : \frac{A'E}{EA},$$

oder $(AA'BF) = (A'AB'F)$ und $(AA'BE) = (A'AB'E)$,

d. h. Das Doppelverhältniss der Punkte A, A', B, F ist gleich dem der entsprechenden A', A, B', F u. s. w. (§. 65).

Diese Art Involution, bei der die involutorischen Abschnitte einen gemeinsamen Mittelpunkt (F) haben, möge nach Möbius (Berichte d. K. S. Gesellsch. d. Wissensch. 1855, S. 33) die symmetrische heissen.

§. 83.

Construction der Doppelpunkte. Da die Doppelpunkte den Abschnitt AA' nach bestimmtem Verhältnisse theilen, oder

$$\frac{AE}{EA'} = -\frac{AF}{FA'} = \pm\sqrt{\frac{AB \,.\, AB'}{A'B \,.\, A'B'}}$$

sein muss, so ziehe man durch die Punkte A, A' zwei Parallelen und trage auf denselben zwei Abschnitte AK und AK' resp. gleich $\sqrt{AB \,.\, AB'}$ und $\sqrt{A'B \,.\, A'B'}$ ab, verbinde die Punkte K und K' durch eine Grade, welche durch einen der Doppelpunkte gehen muss. Trägt man auf der zweiten Parallele $AK'' = AK'$ aber in entgegengesetzter Richtung ab, und verbindet K und K'' durch eine Grade, so geht diese durch den andern Doppelpunkt. Um $\sqrt{AB \,.\, AB'}$ und $\sqrt{A'B \,.\, A'B'}$ einfach zu bestimmen, beschreibe man über BB' als Durchmesser einen Halbkreis, so geben die durch A und A' gelegten Tangenten oder halben kürzesten Sehnen die erforderlichen Längen für AK und AK' ab, je nachdem A und A' beide äussere oder innere Punkte bezüglich des Abschnittes BB' sind.

Ist einer der Punkte A, A' ein äusserer, der andere ein innerer bezüglich BB', oder greifen die Abschnitte AA', BB' in einander ein, so ist eines der Producte $AB \,.\, AB'$, $A'B \,.\, A'B'$ negativ, folglich die Doppelpunkte imaginär.

2) Durch einen beliebigen ausserhalb der Graden in der Ebene liegenden Punkt G lege man zwei Kreise, welche die Abschnitte AB' und $A'B$ als Sehnen fassen und sich in einem zweiten Punkte G' schneiden. Desgleichen lege man durch denselben Punkt G zwei Kreise, welche die Abschnitte AB und $A'B'$ zu Sehnen haben und sich in dem Punkte G'' schneiden. Legt man nun durch die Punkte G, G', G'' noch einen Kreis, so geht dieser durch die Doppelpunkte E und F.

Denn nach §. 76, 1) bestimmt der letzte Kreis auf der Graden zwei Punkte E und F, welche mit den Punktepaaren A und B', A' und B in Involution sind, desgleichen sind dieselben zwei Punkte E und F in Involution mit den Paaren A und B, A' und B', folglich sind E und F die Doppelpunkte für die Paare A und A', B und B' (§. 80).

Trifft der durch G, G', G'' gelegte Kreis nicht die Grade, so sind die Doppelpunkte imaginär.

3) Die Construction wird etwas vereinfacht, wenn man über den Abschnitten AB' und $A'B$ als Durchmessern zwei Kreise beschreibt, die sich in zwei Punkten G und G' schneiden, und ebenso über den Abschnitten AB und $A'B'$ als Durchmessern zwei Kreise zieht, wodurch die Durchschnittspunkte G'' und G''' bestimmt sind. Ein Kreis durch die vier Punkte G, G', G'', G''' gelegt, muss dann nach §. 76 und 80 ebenfalls die Grade in den Doppelpunkten E und F schneiden.

Der letzte Kreis ist unmöglich zu construiren, wenn die Abschnitte AA' und BB' in einander eingreifen, in welchem Falle die Doppelpunkte imaginär sind.

4) Hat man (nach §. 77) den Centralpunkt O zu AA' und BB' bestimmt, so ergeben sich die Doppelpunkte E und F leicht nach der Relation (§. 81)

$$OE = -OF = \pm \sqrt{OA \,.\, OA'}.$$

Legt man also vom Centralpunkte aus zwei Tangenten an den durch AA' oder BB' gelegten Kreis, und trägt die Länge derselben zu beiden Seiten von O auf der Graden ab, so hat man damit die Doppelpunkte bestimmt.

5) Führt man die Mitten M und N der Abschnitte AA' und BB' ein, so hat man

$$OE = -OF = \pm \sqrt{\overline{OM}^2 - \overline{MA}^2};$$

ein ebenfalls leicht construirbarer und in gewissen Fällen anwendbarer Ausdruck.

Ferner ist nach den in §. 77, 3 gegebenen Werthen von AO und AO'

$$OE = -OF = \pm \frac{\sqrt{AB\,.\,AB'\,.\,A'B\,.\,A'B'}}{2MN},$$

also

$$EF = \pm \frac{\sqrt{AB\,.\,AB'\,.\,A'B\,.\,A'B'}}{MN}.$$

und, weil $ME = MO + OE$ ist, sowie mit Rücksicht des Werthes von MO in §. 77,

$$\left.\begin{matrix} ME \\ MF \end{matrix}\right\} = \frac{AB\,.\,AB' + A'B\,.\,A'B'}{4MN} \pm \frac{\sqrt{AB\,.\,AB'\,.\,A'B\,.\,A'B'}}{2MN}$$

$$= \frac{(\sqrt{AB\,.\,AB'} \pm \sqrt{A'B\,.\,A'B'})^2}{4MN}.$$

Aehnlicher Weise ergiebt sich

$$\left.\begin{matrix} NE \\ NF \end{matrix}\right\} = \frac{(\sqrt{BA\,.\,BA'} \mp \sqrt{B'A\,.\,B'A'})^2}{4NM}.$$

In letzterer Formel muss das Doppelzeichen $\mp$ sein, weil die angegebenen Werthe für $ME + EN = MN$ eine rationale Summe geben müssen, die nur auf diese Weise erhalten wird.

Hieraus ergiebt sich zunächst

a) $$\frac{ME}{EN} = \frac{(\sqrt{AB.AB'} \pm \sqrt{A'B\,.\,A'B'})^2}{(\sqrt{BA.BA'} \mp \sqrt{B'A.B'A'})^2},$$

oder, wenn man Zähler und Nenner mit $(\sqrt{AB.AB'} \mp \sqrt{A'B.A'B'})^2$ multiplicirt,

$$\frac{ME}{EN} = \frac{(AB\,.\,AB' - A'B\,.\,A'B')^2}{((AB + A'B')\sqrt{AB'\,.\,A'B} \mp (AB' + A'B)\sqrt{AB\,.\,A'B'})^2}.$$

Da nun nach §. 77, 3

$$AB.AB' = 2MN.AO, \quad A'B\,.\,A'B' = 2MN.A'O,$$

folglich

$$AB\,.\,AB' - A'B\,.\,A'B' = 2MN.AA',$$

ferner

$$AB + A'B' = AB' + A'B = 2MN$$

ist, so hat man

$$\frac{ME}{EN} = \frac{\overline{AA'}^2}{(\sqrt{AB' \cdot A'B} \mp \sqrt{AB \cdot A'B'})^2},$$

wobei von dem Doppelzeichen das eine sich auf den Punkt E, das andere auf den Punkt F bezieht. Die Verhältnisse $\frac{ME}{EN}$, $\frac{MF}{FN}$ haben einen positiven oder negativen Werth, je nachdem von den Abschnitten AA', BB' der eine ganz ausserhalb oder ganz innerhalb des andern liegt. Im erstern Falle sind die Producte $AB' \cdot A'B$ und $AB \cdot A'B'$ beide positiv und der Nenner $(\sqrt{AB' \cdot A'B} \mp \sqrt{AB \cdot A'B'})^2$ ist auch positiv; im andern Falle dagegen sind die genannten Producte, sowie der Nenner negativ. Greifen jedoch die Abschnitte AA', BB' in einander ein, so ist von den beiden Producten das eine positiv das andere negativ, und der Nenner, sowie die erörterten Verhältnisse erhalten complexe Werthe, d. h. die Doppelpunkte sind imaginär.

Ebenso ist zu deuten der Ausdruck

$$\frac{ME}{EN} = \frac{(\sqrt{AB' \cdot A'B} \pm \sqrt{AB \cdot A'B'})^2}{\overline{BB'}^2},$$

den man erhält, wenn man den Nenner der Gleichung a) rational macht.

§. 84.

Construction des sechsten Punktes einer Involution. Seien A und A', B und B' zwei Paare, sowie C als fünfter Punkt einer Involution gegeben, wozu der sechste Punkt C' zu finden ist.

1) Durch einen beliebig in der Ebene angenommenen Punkt G lege man zwei Kreise, welche die Abschnitte AA', BB' als Sehnen fassen, und sich in einem zweiten Punkte G' schneiden werden. Zieht man dann einen Kreis durch G, G' und C, so schneidet dieser die Grade ABC in einem zweiten Punkte C', welches der sechste der Involution ist (§. 76, 1).

2) Hat man den Centralpunkt O der Paare A und A', B und B' bestimmt, so ergiebt sich die Construction von C' unmittelbar nach der Relation

$$OC \cdot OC' = OA \cdot OA'.$$

§. 85.

Involutorische Strahlenbüschel. Gemäss den in §. 65 und 33 gegebenen Erklärungen wird ein Strahlenbüschel von 6 Graden a, b, c, a', b', c' als ein involutorisches zu bezeichnen sein, wenn die Graden zu je zweien a und a', b und b', c und c' einander so zugeordnet sind, dass das Doppelverhältniss von irgend vier derselben z. B. $\sin(abcc')$ dem Doppelverhältniss $\sin(a'b'c'c)$ der vier zugeordneten Strahlen gleich ist.

Da die involutorischen Beziehungen von 6 Punkten einer Graden immer auf zwei Doppelverhältnisse zurückgeführt werden können (§. 66 u. 67), so folgt nach §. 35 u. 36, dass die in §. 69 aufgestellten Involutionsgleichungen auch für ein involutorisches Strahlenbüschel von 6 Graden *mutatis mutandis* Geltung haben. Es ist daher

$$\text{a)}\quad \begin{cases} \dfrac{\sin(aa'bc)}{\sin(a'ab'c')} = \dfrac{\sin(aa'b'c)}{\sin(a'abc')} = 1, \\ \dfrac{\sin(bb'ca)}{\sin(b'bc'a')} = \dfrac{\sin(bb'c'a)}{\sin(b'bca')} = 1, \end{cases}$$

u. s. w.

$$\text{b)}\quad \begin{cases} \sin(abc,\ c'a'b') = -1, \\ \sin(a'bc,\ c'ab') = -1 \end{cases}$$

u. s. w.

wobei der symbolische Ausdruck $\sin(abc, c'a'b')$ das Dreieckschnitts-(Drillings-) Verhältniss der sechs Graden anzeigt und entsprechend den Erörterungen in §. 68 die Bedeutung von

$$\frac{\sin a^\wedge c'}{\sin c'^\wedge b} \cdot \frac{\sin b^\wedge a'}{\sin a'^\wedge c} \cdot \frac{\sin c^\wedge b'}{\sin b'^\wedge a}$$

hat.

§. 86.

Folgesätze. Aus vorstehender Definition sowie nach §. 35 geht hervor: 1) Wird das involutorische Strahlenbüschel der sechs Graden a, a', b, b', c, c' durch eine Transversale in den Punkten A, A', B, B', C, C' geschnitten, so ist

$$\frac{\sin(aa'bc)}{\sin(a'ab'c')} = \frac{(AA'BC)}{(A'AB'C')} = 1$$

u. s. w.

oder $\quad sin\,(abc,\, c'a'b') = (ABC,\, C'A'B') = -1,$
d. h. die sechs Durchschnittspunkte stehen ebenfalls in Involution.

2) Werden umgekehrt von sechs in Involution stehenden Punkten A, A', B, B', C, C' einer Graden nach einem ausserhalb derselben befindlichen Punkte der Ebene sechs Strahlen a, a', b, b', c, c' gezogen, so bilden dieselben ein involutorisches Strahlenbüschel.

3) Wird ein System oder Büschel involutorischer Strahlenpaare von zwei oder mehreren Transversalen geschnitten, so bilden auf jeder der letzteren die Schnittpunkte ein System involutorischer Punktepaare.

4) Gehen mehrere Systeme oder Büschel von Strahlenpaaren durch dasselbe System involutorischer Punktepaare einer Graden, so ist jedes Strahlenbüschel ein involutorisches.

§. 87.

Doppelstrahlen eines involutorischen Strahlenbüschels. Den Doppelpunkten bei einer Involution von mehrern Punktepaaren einer Graden entsprechen die Doppelstrahlen des involutorischen Strahlenbüschels; denn auch die Gleichungen A** und B** des §. 78 lassen sich in reine Doppelverhältnisse auflösen, folglich auch auf Strahlenbüschel unmittelbar anwenden. Die Doppelstrahlen sind auch unter denselben Umständen und Bedingungen imaginär, unter denen es die Doppelpunkte sind, nämlich wenn der Winkel zweier zugeordneter Strahlen in den Winkel eines anderen Strahlenpaares eingreift. Endlich bilden die Doppelstrahlen mit jedem Strahlenpaare des Büschels ein System von vier Harmonikalen.

§. 88.

Senkrechte Strahlenpaare eines involutorischen Strahlenbüschels. Dagegen giebt es in einem involutorischen Strahlenbüschel keinen Strahl, welcher dem Centralpunkte bei einer Involution von Punkten einer Graden entspräche. Dies geht einmal schon aus der Form der Gleichungen A* und B* in §. 73 hervor, welche nur einfache, keine Doppelverhältnisse, enthalten, sodann auch unmittelbar aus der Erklärung des Centralpunktes als desjenigen involutorischen Punktes, dessen zugeordneter der unendlich ferne Punkt der Graden ist. Dieser letztere Punkt sowie sein entsprechender haben zwar gegen die übrigen involutorischen

Punkte der Graden eine singuläre Lage, nicht aber im Allgemeinen die beiden von irgend einem Punkte der Ebene nach denselben gerichteten Strahlen gegen die übrigen von demselben Mittelpunkte aus nach den involutorischen Punkten gezogenen involutorischen Strahlen. Denn schneidet man das Strahlenbüschel durch eine andere Transversale, so entspricht in derselben dem Centralpunkte und dem zugeordneten unendlich fernen Punkte der ersten Graden irgend ein anderes Paar involutorischer Punkte, von denen im Allgemeinen keiner unendlich entfernt liegt, der andere also die charakteristische Eigenschaft des Centralpunktes und mithin die besondere Beziehung zu den übrigen Punktepaaren nicht haben kann. Hieraus folgt, dass im Allgemeinen auch die nach diesen Punkten gerichteten zwei Strahlen in keiner singulären Beziehung zu einander sowie zu den andern Strahlenpaaren stehen können.

In dem besondern Falle jedoch, dass der vom Centralpunkte O eines involutorischen Systemes von Punkten einer Graden ausgehende Strahl O senkrecht auf dieser Graden steht, wird der zugeordnete nach dem unendlich fernen Punkte der Graden gerichtete Strahl O' derselben parallel sein, also auch senkrecht auf dem ihm zugeordneten Strahle stehen und für jeden solcher zwei zu einander senkrecht gerichteter Strahlen lässt sich eine Relation aufstellen, welche der in §. 75 für den Centralpunkt gegebenen analog ist.

Sind nämlich a und a', b und b', c und c', d und d' ... die Strahlenpaare eines involutorischen Büschels, dessen Mittelpunkt S ist, und O und O' zwei aufeinander senkrechte Strahlen desselben, so ist immer

$$tg\ o^\wedge a \,.\, tg\ o^\wedge a' = tg\ o^\wedge b \,.\, tg\ o^\wedge b' = tg\ o^\wedge c \,.\, tg\ o^\wedge c' = \ldots$$

Denn schneidet man das Strahlenbüschel durch eine zu O' parallele Transversale l, welche die Strahlen in den Punkten A, A', B, B' ... O, O' trifft, so ist O' der unendlich ferne Punkt der Transversale, folglich O der Centralpunkt der Punktepaare A und A', B und B' ..., mithin ist

$$OA \,.\, OA' = OB \,.\, OB' = OC \,.\, OC' = \ldots$$

und

$$\frac{OA}{SO} \cdot \frac{OA'}{SO} = \frac{OB}{SO} \cdot \frac{OB'}{SO} = \frac{OC}{SO} \cdot \frac{OC'}{SO} = \ldots$$

d. i.

$$tg\ o^\wedge a \,.\, tg\ o^\wedge a' = tg\ o^\wedge b \,.\, tg\ o^\wedge b' = \ldots$$

Es lässt sich ferner zeigen, dass es für jedes involutorische Strahlenbüschel wenigstens zwei dazu gehörige, einander zugeordnete Strahlen giebt, welche senkrecht auf einander stehen.

Denn hat das Strahlenbüschel zwei Doppelstrahlen e und f, so sind die Halbirungslinien des Winkels $e^\wedge f$ derselben, sowie des Nebenwinkels die beiden zu derselben Involution gehörigen und auf einander senkrecht stehenden Strahlen. Dieselben theilen nämlich nach 46, 3 den Winkel der Doppelstrahlen harmonisch, ebenso wie auch die andern Strahlenpaare und stehen folglich mit denselben nach §. 79, 3 in Involution.

Hat aber das Strahlenbüschel keine Doppelpunkte, so lege man durch dasselbe eine Transversale, auf welcher die involutorischen Punktepaare A und A', B und B', C und C' als Durchschnittspunkte mit demselben bestimmt werden. Hierbei greifen die involutorischen Abschnitte AA', BB', CC' in einander ein (§. 79, 1), folglich giebt es nach §. 76, 3 zwei Punkte G und G' der Ebene, von denen aus jeder Abschnitt der Transversale unter einem rechten Winkel erscheint. Fällt nun der Mittelpunkt S des involutorischen Strahlenbüschels mit einem der Punkte G, G' zusammen, so bilden alle Paare zugeordneter Strahlen rechte Winkel.

Ist dies nicht der Fall, so lege man durch S, G, G' einen Kreis (dessen Mittelpunkt auf der Transversale liegen muss), welcher die Transversale in den Punkten O und O' schneide. Nach diesen Durchschnittspunkten ziehe man von S aus das rechtwinklige Strahlenpaar O und O', welches mit den übrigen Strahlenpaaren ebenfalls in Involution ist, weil auch das Punktepaar O und O' nach §. 76, 3 mit den Paaren A und A', B und B', C und C' in Involution steht.

§. 89.

In unmittelbarem Zusammenhange damit stehen noch folgende Sätze:

1) Haben in einem involutorischen Strahlenbüschel zwei von je zwei zugeordneten Strahlen gebildete Winkel eine gemeinschaftliche Halbirungslinie, so wird durch diese auch jeder dritte Winkel zugeordneter Strahlen halbirt.

Sind nämlich a und a, b und b', c und c' involutorisches Strah-

lenpaare und ist o die gemeinschaftliche Halbirungslinie der Win- $a^\wedge a'$, $b^\wedge b'$, so theilt dieser Strahl sowie ein darauf senkrechter o' dieselben Winkel harmoniseh (§. 46, 3); somit sind o und o' die Doppelstrahlen der Involution, theilen daher auch den Winkel $c^\wedge c'$ harmonisch und halbiren, weil sie rechtwinklig sind, denselben Winkel $c^\wedge c'$ (und dessen Nebenwinkel, §. 46, 1).

2) Sind in einem involutorischen Strahlenbüschel zwei Strahlenpaare rechtwinklig, so sind es auch die übrigen Paare.

Sind die Winkel $a^\wedge a'$, $b^\wedge b'$ rechte und schneidet man das Büschel durch eine Transversale in den Punkten A und A', B und B', C und C', beschreibt dann über zweien der involutorischen Abschnitte AA', BB' als Durchmessern zwei Kreise, so gehen beide durch den Mittelpunkt S des Büschels, weil ASA' und BSB' rechte Winkel sind. Nun muss ein über CC' als Durchmesser beschriebener Kreis ebenfalls durch S gehen (§. 76, 2), folglich ist auch der Winkel CSC' ein rechter.

Relationen zwischen sechs involutorischen Punkten und einem beliebigen siebenten einer Graden.

§. 90.

Sind AA', BB', CC' drei beliebige Abschnitte einer Graden, L, M, N deren Mitten und Q irgend ein Punkt derselben Graden, so bleibt der Ausdruck

$$QA \,.\, QA' \,.\, MN + QB \,.\, QB' \,.\, NL + QC \,.\, QC' \,.\, LM$$

constant, wie auch Q in der Graden gewählt werden mag.

Denn es sei Q ein anderer Punkt der Graden, so ist

$$QA = QQ' + Q'A, \quad QA' = QQ' + Q'A',$$

und

$$QA \,.\, QA' = \overline{QQ'}^2 + Q'A \,.\, Q'A' + (Q'A + Q'A')\, QQ'$$
$$= \overline{QQ'}^2 + Q'A \,.\, Q'A' + 2\, Q'L \,.\, QQ' \text{ (§. 6).}$$

Ebenso

$$QB \,.\, QB' = \overline{QQ'}^2 + Q'B \,.\, Q'B' + 2\, Q'M \,.\, QQ',$$
$$QC \,.\, QC' = \overline{QQ'}^2 + Q'C \,.\, Q'C' + 2\, Q'N \,.\, QQ'.$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen der Reihe nach mit MN, NL, LM, addirt sie dann und bemerkt, dass

$$MN + NL + LM = 0,$$
$$Q'L . MN + Q'M . NL + Q'N . LM = 0$$

ist, so erhält man

$$QA . QA' . MN + QB . QB' . NL + QC . QC' . LM =$$
$$Q'A . Q'A' . MN + Q'B . Q'B' . NL + Q'C . Q'C' . LM,$$

d. h. die Summe dieser drei Producte ist von der Wahl des Punktes Q unabhängig.

Anmerkung. Fallen die Punkte A', B', C' mit ihren zugeordneten A, B, C zusammen, und ist folglich LM, MN, NL resp. $=$ AB, BC, CA, so reducirt sich der Ausdruck auf

$$\overline{QA}^2 . BC + \overline{QB}^2 . CA + \overline{QC}^2 . AB,$$

dessen Werth nach §. 8 $= - AB . BC . CA$ ist.

§. 91.

Lehrsatz. Sind die Punktepaare A und A', B und B', C und C' in Involution, L, M, N wieder die Mitten ihrer Abschnitte und Q ein beliebiger Punkt der Graden, so ist

I) $QA . Q'A' , MN + QB . QB' . NL + QC . QC' . LM = 0.$

Da der Werth des Ausdrucks für jede beliebige Lage des Punktes Q in der Graden unveränderlich bleibt, so lasse man Q mit dem Centralpunkte O der Involution zusammenfallen. Dann sind die Producte $OA . OA'$, $OB . OB'$, $OC . OC'$ einander gleich, und der Ausdruck kann in

$$OA . OA' (LM + MN + NL)$$

zusammengezogen werden, dessen Werth wegen $LM + MN + NL = 0$ auch $= 0$ ist, folglich u. s. w.

§. 92.

Zusätze. 1) Lässt man das Punktepaar B und B' in dem einen Doppelpunkte E, und das Paar C und C' in dem andern F zusammenfallen, so hat man keine eigentliche Involution mehr, sondern nur ein harmonisches Verhältniss. Die Gleichung I) geht dann über in

II) $QA . QA' . EF + \overline{QE}^2 FL + \overline{QF}^2 . LE = 0,$

welche mit der Gleichung VIII. des §. 50 identisch ist.

2) Nimmt man C' als den unendlich fernen Punkt der Graden,

also C als den Centralpunkt O an, so geht die Gleichung I) über in

III) $$QA \,.\, QA' - QB \,.\, QB' + 2LM \,.\, QO = 0.$$

Denn dividirt man die Gleichung I) durch MN, so erhält man zunächst

$$QA \,.\, QA' + QB \,.\, QB' \frac{LN}{NM} + QC \,.\, LM \,.\, \frac{QC'}{MN} = 0.$$

Nun ist $MN = \dfrac{MC + MC'}{2}$; $\dfrac{MN}{QC'} = \tfrac{1}{2}\left(\dfrac{MC}{QC'} + \dfrac{MC'}{QC'}\right)$ und, weil C' der unendlich ferne Punkt sein soll, also auch N ein unendlich fern liegender Punkt ist,

$$\frac{LN}{NM} = -1, \quad \frac{MN}{QC'} = \tfrac{1}{2}, \text{ folglich}$$

$$QA \,.\, QA' - QB \,.\, QB' + 2LM \,.\, QO = 0.$$

Diese Gleichung findet nun statt zwischen zwei beliebigen Punktepaaren A und A', B und B', ihrem Centralpunkte O und einem beliebigen fünften Punkte Q der Graden, sie muss also auch aus der Grundgleichung für den Centralpunkt $OA \,.\, OA' = OB \,.\, OB'$ unmittelbar hervorgehen. Man hat nämlich

$$QA = QO + OA, \quad QA' = QO + OA',$$

folglich

$$QA \,.\, QA' = \overline{QO}^2 + QO\,(OA + OA') + OA \,.\, OA',$$

ebenso

$$QB \,.\, QB' = \overline{QO}^2 + QO\,(OB + OB') + OB \,.\, OB'.$$

Zieht man beide Gleichungen von einander ab, und berücksichtigt, dass $OA + OA' = 2OL$, $OB + OB' = 2OM$ (§. 6), $OL - OM = ML$, so erhält man

$$QA \,.\, QA' - QB \,.\, QB' = 2ML \,.\, QO.$$

Anmerkung. Fällt Q mit A zusammen, so reducirt sich diese Gleichung auf

$$AB \,.\, AB' = 2LM \,.\, AO$$

wie bereits in §. 77, 3 bemerkt ist.

§. 93.

Relationen, in welche die Mittelpunkte der involutorischen Abschnitte eintreten.

Lehrsatz 1. Zwischen den involutorischen Punktepaaren A und A', B und B', C und C' und den Mitten L, M, N der involutorischen Abschnitte bestehen die Gleichungen

$$\text{IV.}\quad\left\{\begin{array}{l} \dfrac{AB\,.\,AB'}{AC\,.\,AC'}=\dfrac{A'B\,.\,A'B'}{A'C\,.\,A'C'}=\dfrac{LM}{LN},\\[2mm] \dfrac{BC\,.\,BC'}{BA\,.\,BA'}=\dfrac{B'C\,.\,B'C'}{B'A\,.\,B'A'}=\dfrac{MN}{ML},\\[2mm] \dfrac{CA\,.\,CA'}{CB\,.\,CB'}=\dfrac{C'A\,.\,C'A'}{C'B\,.\,C'B'}=\dfrac{NL}{NM}. \end{array}\right.$$

Lässt man nämlich in der Gleichung I) §. 91 den Punkt Q mit A zusammenfallen, so erhält man

$$AB\,.\,AB'\,.\,NL+AC\,.\,AC'\;LM=0$$

oder wenn man durch $AC\,.\,AC'\,.\,LN$ dividirt

$$\frac{AB\,.\,AB'}{AC\,.\,AC'}=\frac{LM}{LN}.$$

In derselben Weise erhält man die übrigen Ausdrücke und Gleichungen, wenn man Q der Reihe nach mit A', B, B' etc. zusammenfallen lässt.

§. 94.

Zusätze. 1) Diese Gleichungen geben wieder unmittelbar die Fundamentalgleichungen A) und B) der Involution (§. 59). Es folgt nämlich aus

$$\frac{AB\,.\,AB'}{AC\,.\,AC'}=\frac{A'B\,.\,A'B'}{A'C\,.\,A'C'}$$

$$\frac{AB}{BA'}:\frac{AC}{CA'}=\frac{A'B'}{B'A}:\frac{AC'}{C'A}\quad\text{und}$$

$$\frac{AB'}{B'A'}:\frac{AC}{CA'}=\frac{A'B}{BA}:\frac{A'C'}{C'A}$$

oder

$$\frac{(AA'BC)}{(A'AB'C')}=\frac{(AA'B'C)}{(A'ABC')}=1,$$

welche die erste der unter A) aufgestellten Gleichungen ist.

Um eine der Gleichungen B) zu erhalten, multiplicire man die drei ersten unter einander stehenden Glieder der drei Gleichungen, so kommt

$$AB'\,.\,BC'\,.\,CA'=AC'\,.\,BA'\,.\,CB'$$

oder

$$(ABC,\,C'A'B')=-1$$

2) Auch die Gleichungen E) §. 70 erhält man sehr einfach mit Hilfe der Gleichungen IV. Setzt man nämlich in die Gleichung

$$LM + MN + NL = 0, \text{ oder } \frac{MN}{ML} + \frac{LN}{LM} = 1$$

für $\frac{MN}{ML}$ und $\frac{LN}{LM}$ die Werthe aus IV) ein, so kommt

$$\frac{BC \,.\, BC'}{BA \,.\, BA'} + \frac{AC \,.\, AC'}{AB \,.\, AB'} = 1,$$

oder

E) $$AB = \frac{AC \,.\, AC'}{AB'} + \frac{BC \,.\, BC'}{A'B}$$

3) Drückt man die zwischen den Mittelpunkten L, M, N enthaltenen Abschnitte wieder durch die Involutionspunkte selbst aus, gemäss den Beziehungen

$$LM = \frac{AB' + A'B}{2}, \quad MN = \frac{BC' + B'C}{2}, \quad NL = \frac{CA' + C'A}{2},$$

so erhält man aus IV. noch folgende, ebenfalls die Involution von sechs Punkten bezeichnende Gleichungen:

F) $$\frac{AB \,.\, AB'}{AC \,.\, AC'} = \frac{AB' + A'B}{AC' + A'C}$$

u. s. w.

§. 95.

Lehrsatz 2. Zwischen drei involutorischen Punktepaaren A und A', B und B', C und C' und den Mitten L, M, N ihrer Abschnitte findet ferner folgende Gleichung statt:

V. $\overline{LA}^2 \,.\, MN + \overline{MB}^2 \,.\, NL + \overline{NC}^2 \,.\, LM + LM \,.\, MN \,.\, NL = 0.$

Setzt man in I (91) statt

$$QA \,.\, QA', \quad QB \,.\, QB', \quad QC \,.\, QC'$$

die gleichbedeutenden Ausdrücke

$$\overline{QL}^2 - \overline{LA}^2, \quad \overline{QM}^2 - \overline{MB}^2, \quad \overline{QN}^2 - \overline{NC}^2 \quad (§. 5)$$

ein, so geht sie über in

$$\overline{QL}^2 \,.\, MN + \overline{QM}^2 \,.\, NL + \overline{QN}^2 \,.\, LM - (\overline{LA}^2 \,.\, MN + \overline{MB}^2 \,.\, NL + \overline{NC}^2 \,.\, LM) = 0.$$

Nun ist nach §. 8

$$\overline{QL}^2 \,.\, MN + \overline{QM}^2 \,.\, NL + \overline{QN}^2 \,.\, LM = - LM \,.\, MN \,.\, NL,$$

folglich

$$\overline{LA}^2 \,.\, MN + \overline{MB}^2 \,.\, NL + \overline{NC}^2 \,.\, LM + LM \,.\, MN \,.\, NL = 0.$$

§. 96.

Zusätze. 1) Werden die Punkte C, C' in einem Doppelpunkte E vereinigt, so hat man

$$\overline{LA}^2 . ME + \overline{MB}^2 . EL + LM . ME . EL = 0,$$

oder

$$\frac{\overline{AA'}^2}{LE} - \frac{\overline{BB'}^2}{ME} = 4\, LM.$$

2) Die Gleichung V. lässt sich noch verallgemeinern. Schreibt man sie zunächst unter der Form

$$\frac{\overline{LA}^2}{LM . NL} + \frac{\overline{MB}^2}{MN . LM} + \frac{\overline{NC}^2}{NL . MN} + 1 = 0,$$

löst jedes Glied in ein Product zweier Verhältnisse auf und verwandelt dieses durch Einführung des unendlich fernen Punktes Q in ein Product zweier Doppelverhältnisse (§. 40), dergestalt, dass z. B. das erste Glied

$$\frac{\overline{LA}^2}{LM . NL} \text{ in } -\left(\frac{AL}{LM} : \frac{AQ}{QM}\right)\left(\frac{AL}{LN} : \frac{AQ}{QN}\right)$$

übergeht, so erhält man

$$(AMLQ)\,(ANLQ) + (BNMQ)\,(BLMQ) + (CLNQ)\,(CMNQ) = 1;$$

eine Relation, die auch giltig ist, wenn Q nicht mehr der unendlich ferne, sondern ein beliebiger Punkt der Graden ist, aber mit dem Unterschiede, dass dann L, M, N nicht mehr die Mitten von AA', BB', CC', sondern die harmonisch conjugirten Punkte von Q bezüglich der Abschnitte AA', BB', CC' sind. Uebersetzt man die Doppelverhältnisse wieder in ihre gewöhnliche Form und zieht die Producte zusammen, so ergiebt sich auch folgender Ausdruck:

$$\frac{\overline{LA}^2}{\overline{QA}^2} . \frac{MN}{QL} + \frac{\overline{MB}^2}{\overline{QB}^2} . \frac{NL}{QM} + \frac{\overline{NC}^2}{\overline{QC}^2} . \frac{LM}{QN} + \frac{LM . MN . NL}{QL . QM . QN} = 0.$$

Relationen zwischen sechs involutorischen Punkten und zwei beliebigen Punkten in einer Graden.

§. 97.

Giebt man der Gleichung I. §. 91 die Form

$$\frac{QA . QA'}{CQ . QC'} \frac{MN}{ML} + \frac{QB . QB'}{QC . QC'} \frac{LN}{LM} = 1$$

und ist Q' der unendlich ferne Punkt der Graden, mit Hilfe dessen man den vorstehenden Ausdruck in einen mit lauter Doppelverhältnissen umsetzt, nämlich in

$$\text{VI.}\quad (ACQQ')(A'C'QQ')(NLMQ') + (BCQQ')(B'C'QQ')(NMLQ') = 1,$$

so gilt derselbe auch, wenn Q' nicht mehr den unendlich fernen, sondern einen beliebigen Punkt bedeutet (§. 40), nur mit der Abänderung, dass L, M, N nicht mehr die Mitten, sondern die harmonisch zugeordneten Punkte von Q' bezüglich der Abschnitte AA', BB', CC' sind.

Schreibt man die Doppelverhältnisse in gewöhnlicher Form und zieht die Gleichung zusammen, so giebt sie

$$\text{VIb.}\quad \frac{QA\,.\,QA'}{Q'A\,.\,Q'A'}\,MN\,.\,Q'L + \frac{QB\,.\,QB'}{Q'B\,.\,Q'B'}\,NL\,.\,Q'M + \frac{QC\,.\,QC'}{Q'C\,.\,Q'C'}\,LM\,.\,Q'N = 0.$$

§. 98.

Zusätze. 1) Lässt man den Punkt Q mit A zusammenfallen, so erhält man eine Involutionsgleichung mit nur einem beliebigen Punkt Q', in der aber L, M, N dieselbe Bedeutung wie in VI) haben:

$$(BCAQ')(B'C'AQ') = (MNLQ'),$$

oder

$$\text{VII.}\quad \frac{AB\,.\,AB'}{Q'B\,.\,Q'B'} : \frac{AC\,.\,AC'}{Q'C\,.\,Q'C'} = \frac{ML}{LN} : \frac{MQ'}{Q'N}.$$

2) Führt man die Mittelpunkte L', M', N' der Abschnitte AA', BB', CC' ein, und berücksichtigt, dass

$$Q'L\,.\,Q'L' = Q'A\,.\,Q'A' \quad (\text{§. 52, XII.})$$
$$Q'M\,.\,Q'M' = Q'B\,.\,Q'B' \text{ etc.,}$$

so geben die Gleichungen VI) und VII)

$$\text{VI*}\quad QA\,.\,QA'\,\frac{MN}{Q'L'} + QB\,.\,QB'\,\frac{NL}{Q'M'} + QC\,.\,QC'\,\frac{LM}{Q'N'} = 0,$$

$$\text{VII*}\quad \frac{AB\,.\,AB'}{AC\,.\,AC'} = \frac{LM\,.\,Q'M'}{LN\,.\,Q'N'}.$$

3) Nimmt man den Punkt Q als den unendlich fernen der Graden an, so gehen die Gleichungen VI) und VI*) über in

VIII. $$\frac{MN \,.\, Q'L}{Q'A \,.\, Q'A'} + \frac{NL \,.\, Q'M}{Q'B \,.\, Q'B'} + \frac{LM \,.\, Q'N}{Q'C \,.\, Q'C'} = 0,$$

VIII* $$\frac{MN}{Q'L'} + \frac{NL}{Q'M'} + \frac{LM}{Q'N'} = 0,$$

4) Setzt man bezüglich der allgemeinen Gleichung VI. voraus, dass einer der Involutionspunkte z. B. C' der unendlich ferne Punkt der Graden ist, womit der zugeordnete Punkt C zum Centralpunkt O wird, so hat man

IX. $$\frac{QA \,.\, QA'}{Q'A \,.\, Q'A'} MN \,.\, Q'L + \frac{QB \,.\, QB'}{Q'B \,.\, Q'B'} NL \,.\, Q'M + \frac{QO}{Q'O} LM \,.\, Q'N = 0,$$

wobei L, M die zu Q' zugeordneten harmonischen Punkte bezüglich der Abschnitte AA', BB' sind und N derjenige Punkt ist, für welchen aus $(OC'NQ') = -1$ $ON = -OQ'$ hervorgeht.

5) Lässt man den Punkt Q mit A zusammenfallen und bemerkt, dass $Q'N = 2\,Q'O$ ist, so reducirt sich letztere Gleichung auf

X. $$\frac{AB \,.\, AB'}{Q'B \,.\, Q'B'} = 2\,\frac{AO \,.\, LM}{Q'M \,.\, LN}.$$

§. 99.

Aufgaben. Aus dem, was über die Involution von drei Punktepaaren sowie bezüglich ihres Centralpunktes und ihrer Doppelpunkte bisher erörtert worden ist, geht hervor, dass eine Involution bestimmt ist

1) durch zwei Paare zugeordneter Punkte (§. 69, 73);
2) durch ein Punktepaar und den Centralpunkt (§. 75);
3) durch ein Punktepaar und einen Doppelpunkt (§. 78);
4) durch die beiden Doppelpunkte (§. 79);
5) durch den Centralpunkt und einem Doppelpunkt (§. 81).

In jedem dieser fünf Fälle ist durch die gegebenen Elemente zu irgend einem Involutionspunkte der zugeordnete bestimmt und die Lösung der betreffenden Aufgaben durch Construction ist theils unmittelbar angegeben, theils nahe gelegt zu 1) in §. 84, 1, zu 2) in §. 84, 2, zu 3) in §. 79, 1, zu 4) in §. 79, 2, zu 5) in §. 81.

Die Aufgaben lassen noch verschiedene Abänderungen zu und es mag hier nur noch die Construction eines involutorischen Punktepaares, dessen Mittelpunkt ausser den übrigen die Involution bestimmenden Elementen gegeben ist, kurz angedeutet werden.

1. Aufgabe. Gegeben die Punktepaare A und A', B und B'

und der Mittelpunkt N des dritten Paares, es sollen die Punkte des letzteren bestimmt werden.

Durch einen in der Ebene beliebig angenommenen Punkt G lege man zwei Kreise, welche resp. die Abschnitte AA', BB' als Sehnen fassen und in einem zweiten Punkte G' sich schneiden. Hierauf construire man durch G und G' einen dritten Kreis, dessen Mittelpunkt auf der durch N zur AB senkreckt gelegten Graden sich befindet. Dieser durchschneidet die Grade AB in den beiden gesuchten Punkten C, C'. Berührt der Kreis die Grade, was nur in N stattfinden kann, so ist N selbst ein Doppelpunkt. Trifft der Kreis die Grade gar nicht, so sind die beiden gesuchten Punkte CC' imaginär, für welchen Fall die Bedingungen sogleich erörtert werden sollen.

Greift von den beiden Abschnitten AA', BB' einer in den andern ein, so kann man die Construction dadurch vereinfachen, dass man über diesen Abschnitten als Durchmessern Kreise beschreibt und dann durch deren Durchschnittspunkte einen Kreis legt, dessen Mittelpunkt N ist.

Die Richtigkeit der Constructionen folgt unmittelbar aus §. 76.

Gleichungen, welche den Abschnitt NC unmittelbar enthalten, giebt die Relation I. §. 91, in der man zur Vereinfachung Q mit N zusammenfallen lässt, d. i. die Gleichung

$$\overline{NC}^2 . LM = NA . NA' . MN + NB . NB' . NL,$$

sowie V. §. 95:

$$\overline{LA}^2 MN + \overline{MB}^2 . NL + \overline{NC}^2 . LM + LM . MN . NL = 0.$$

2. Aufgabe. Gegeben ein Punktepaar A und A', der Centralpunkt O und der Mittelpunkt N eines anderen Paares C und C', zu bestimmen die Punkte des letzteren.

Man lege durch A und A' einen beliebigen Kreis, sowie durch O eine Grade, welche denselben in zwei Punkten G, G' treffe, beschreibe hierauf einen Kreis, welcher durch diese beiden Punkte G, G' geht, und sein Centrum auf einer durch N gelegten Senkrechten zu AA' hat, so schneidet dieser die Grade AA' in den beiden gesuchten Punkten C, C', die in den einen Berührungspunkt N zusammenfallen, wenn dieser ein Doppelpunkt der Involution ist, oder imaginär sind, wenn der Kreis die Grade AA' gar nicht trifft.

Zur Aufstellung der Bedingungen, unter welchen C, C' imaginär werden, bemerke man, dass aus

$$OC \,.\, OC' = OA \,.\, OA' \text{ und}$$
$$OC \,.\, OC' = \overline{ON}^2 - \overline{NC}^2 = \overline{ON}^2 - \overline{NC'}^2 \text{ (§. 6)}$$
$$NC = -NC' = \pm \sqrt{\overline{ON}^2 - OA \,.\, OA'}$$

sich ergiebt.

Ist nun dabei O ein innerer Punkt des Abschnittes AA', so ist $OA \,.\, OA'$ negativ, folglich NC unbedingt reell. In diesem Falle vereinfacht sich obige Construction auf folgende: Man beschreibe über AA' als Durchmesser einen Kreis, lege durch O eine Senkrechte auf AA und durch die Durchschnittspunkte G, G' derselben mit dem Kreise einen zweiten Kreis, dessen Mittelpunkt N ist, so schneidet derselbe auf AA' die beiden Punkte C, C' ab. Daraus geht auch hervor, dass wenn absolut $NG \gtrless NA$ ist, $NG \lessgtr NA'$ sein muss, oder dass die Abschnitte AA' und CC' in einander eingreifen, übereinstimmend mit §. 74.

Ist dagegen O ein äusserer Punkt bezüglich des Abschnittes AA', so ist

$$NC \left\{ \begin{matrix} \text{reell} \\ \text{imaginär} \end{matrix} \right\}, \text{ wenn } \overline{ON}^2 \gtrless OA.OA', \text{ oder wenn } \overline{ON}^2 \gtrless \overline{OE}^2 \text{ ist,}$$

wobei E einen der Doppelpunkte der Involution bedeutet (§. 81); d. h. NC oder NC' ist reell oder imaginär, je nachdem der Punkt N ausserhalb oder innerhalb des Abschnittes EF der beiden Doppelpunkte liegt, übereinstimmend mit §. 44 und 57, insofern $(CC'EF) = -1$ sein muss.

Die Aufgabe lässt auch eine mehrfache Lösung dadurch zu, dass man zuvor den Punkt N' construirt, welcher mit N ein involutorisches Punktepaar bildet. Denn ist $ON \,.\, ON' = OA \,.\, OA'$, so geht der vorhergehende Ausdruck für NC oder $\overline{NC}^2$ über in

$$\overline{NC}^2 = \overline{ON}^2 - ON \,.\, ON' = ON \,.\, N'N,$$

oder

$$\overline{NC}^2 = NN' \,.\, NO,$$

wovon die Construction leicht auszuführen ist.

3. Aufgabe. Gegeben ein Punktepaar A und A' ein Doppelpunkt E sowie die Mitte N eines andern Paares C und C' dessen Punkte gefunden werden sollen.

Man lege durch A, A' einen beliebigen Kreis, construire dazu einen zweiten, welcher die Grade AA' in dem Doppelpunkte E berührt und den ersteren in zwei Punkten G und G' schneidet. Die

Grade GG' bestimmt den Centralpunkt O, womit die Aufgabe auf die vorhergehende zurückgeführt ist.

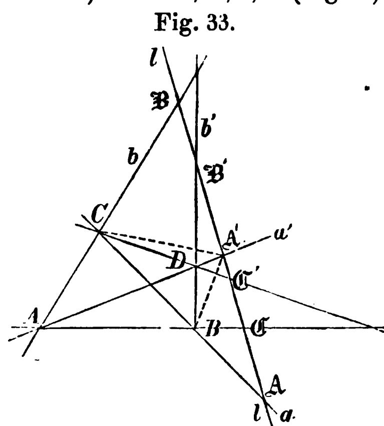
Oder: man bestimme den zugeordneten harmonischen Punkt F zu E bezüglich des Abschnittes AA' und construire C, C' nach §. 57.

Auf dieselbe Weise können auch die Punkte C, C' bestimmt werden, wenn ausser ihrer Mitte N entweder die beiden Doppelpunkte E und F oder ein Doppelpunkt und der Centralpunkt gegeben sind.

§. 100.

Involutionen am vollständigen Viereck und Vierseit. 1) Seien A, B, C, D (Fig. 33) die vier Punkte eines Vierecks, dessen Seiten AB, BC, CA, AD, BD, CD kurz mit c, a, b, a', b', c' bezeichnet werden mögen, so dass gegenüberstehende Seiten des vollständigen Vierecks mit einerlei Buchstaben benannt sind. Sei ferner l eine beliebige Transversale in der Ebene des Vierecks, welche die Seiten desselben a, b, c, a' ... in den Punkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}'$ ... treffe. Verbindet man noch den Punkt $\mathfrak{A}'$ mit B und C durch Grade, so hat man nach der in §. 37 bemerkten Bezeichnung

Fig. 33.



$$^{a'}(bac'C\mathfrak{A}') = {}^{a'}(cab'B\mathfrak{A}'),$$

folglich auch

$$^{l}(bac'C\mathfrak{A}') = {}^{l}(cab'B\mathfrak{A}'),$$

d. i.

$$(\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{C}'\mathfrak{A}') = (\mathfrak{C}\mathfrak{A}\mathfrak{B}'\mathfrak{A}')$$

oder

$$(\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{C}'\mathfrak{A}') = (\mathfrak{B}'\mathfrak{A}'\mathfrak{C}\mathfrak{A}) \quad (§. 27, I).$$

Diese Gleichung besagt aber nach §. 65 und 66, dass $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ involutorische Punktepaare sind und es ergiebt sich hieraus der Satz:

Jede Transversale in der Ebene eines vollständigen Vierecks trifft dessen drei Paare gegenüberliegender Seiten in drei Punktepaaren, welche eine Involution bilden.

Zusatz. Legt man die Grade l durch je zwei Durchschnittspunkte von gegenüberliegenden Seiten, also entweder durch $a \cdot a'$ und $b \cdot b'$ oder durch $b \cdot b'$ und $c \cdot c'$ oder durch $c \cdot c'$ und $a \cdot a'$, so fallen jedesmal zwei Punktepaare der Involution in einen Doppelpunkt zusammen und die nach vorstehendem Satze aufzustellende Involutionsgleichung

$$(\mathfrak{ABC},\ \mathfrak{C'A'B'}) = -1$$

reducirt sich auf

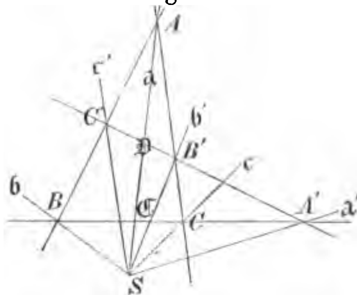
$(\mathfrak{CC'AB}) = -1$, wenn l durch $a \cdot a'$ und $b \cdot b'$ gelegt ist,
$(\mathfrak{AA'BC}) = -1$ „ l „ $b \cdot b'$ „ $c . c'$ „ „
$(\mathfrak{BB'CA}) = -1$ „ l „ $c \cdot c'$ „ $a \cdot a'$ „ „

d. i. **In einem vollständigen Viereck wird jede Verbindungslinie der Durchschnittspunkte gegenüberliegender Seiten von den zwei übrigen Seiten harmonisch getheilt.**

Hiernach stellt sich der Satz §. 60 als ein specieller des vorhergehenden heraus.

2) Seien a, b, c, d (Fig. 34) die Seiten eines vollständigen Vierseits, A und A', B und B', C und C' die drei Paare gegenüberstehender Ecken desselben, oder die Durchschnittspunkte $a \cdot b$ und $c \cdot d$, $a \cdot c$ und $b \cdot d$, $b \cdot c$ und $a \cdot d$; sei ferner S ein beliebiger Punkt in der Ebene des Vierseits, von welchem aus nach den Ecken desselben die Strahlen SA oder $\mathfrak{a}$, SA' oder $\mathfrak{a}'$, SB oder $\mathfrak{b}$ u. s. w. gezogen sind. Denkt man

Fig. 34.



sich noch A und A' durch eine Grade verbunden und sind $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ die Durchschnittspunkte von $\mathfrak{a}$ mit c und d, so hat man, A als Strahlenmittelpunkt betrachtet, nach §. 36, 1

$$(B\mathfrak{C}CA') = (C'\mathfrak{D}B'A'),$$

mithin $\quad sin\,(\mathfrak{baca'}) = sin\,(\mathfrak{c'ab'a'})$, (§. 36, 2),

oder $$\sin(\mathfrak{baca}') = \sin(\mathfrak{b}'\mathfrak{a}'\mathfrak{c}'\mathfrak{a}),$$
welche Gleichung nach §. 85 anzeigt, dass die Strahlenpaare $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}'$ involutorisch sind.

Daher: Die nach den drei Paaren gegenüberliegender Ecken eines vollständigen Vierseits von einem beliebigen Punkte der Ebene desselben aus gezogenen Strahlenpaare bilden eine Involution.

Derselbe Satz lässt sich auch nach dem vorhergehenden wie folgt beweisen: A, B', S, C' kann man als die vier Punkte eines vollständigen Vierecks ansehen, dessen sechs Seiten AC', SB', AB', SC', $B'C'$, SA die Transversale BA' in sechs involutorischen Punkten schneiden: folglich bilden die von S aus nach diesen Punkten gezogenen Strahlen ein involutorisches Büschel.

Zusätze. Verlegt man den Punkt S in einen der drei Durchschnittspunkte je zweier Diagonalen des Vierseits, also entweder in den Durchschnitt von AA' und BB', oder von BB' und CC' oder von CC' und AA', so fallen jedesmal zwei Strahlenpaare in einen Doppelstrahl zusammen und die nach vorstehendem Satze aufzustellende Involutionsgleichung
$$\sin(\mathfrak{abc}, \mathfrak{c}'\mathfrak{a}'\mathfrak{b}') = -1$$
geht über in

$\sin(\mathfrak{cc}'\mathfrak{ab}) = -1$, wenn S in dem Durchschn. von AA' u. BB' liegt,
$\sin(\mathfrak{aa}'\mathfrak{bc}) = -1$ „ S „ „ „ „ BB' „ CC' „
$\sin(\mathfrak{bb}'\mathfrak{ca}) = -1$ „ S „ „ „ „ CC' „ AA' „

d. h. In einem vollständigen Vierseit ist jedes Strahlenbüschel, gebildet von zwei Diagonalen und den Verbindungslinien ihres Durchschnittspunktes mit den beiden übrigen Ecken des Vierseits, ein harmonisches. (vergl. §. 60 u. 62.)

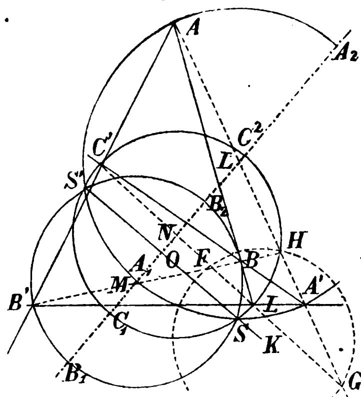
3) Wird der Punkt S in unendlicher Entfernung angenommen, so werden die nach den sechs Ecken des Vierseits gezogenen Strahlen einander parallel, ohne doch aufzuhören, eine Involution zu bilden. Jede Transversale wird somit von denselben in sechs involutorischen Punkten geschnitten, oder:

Die (Parallel-) Projectionen der sechs Ecken eines vollständigen Vierseits auf irgend eine Grade stehen in Involution.

4) Wird der Punkt S in einen der Durchschnittspunkte von zwei Kreisen verlegt, die über zwei Diagonalen des Vierseits z. B. über

BB' und CC' *) (Fig. 35) als Durchmessern beschrieben sind, so stehen die zwei nach den Endpunkten dieser Diagonalen von S aus gezogenen Strahlen SB und SB', SC und SC' senkrecht auf einander, folglich nach §. 88 und 89 auch das dritte Paar SA und SA' der involutorischen Strahlen; und es wird daher der über AA' als Durchmesser beschriebene Kreis ebenfalls durch die beiden Durchschnittspunkte S und S' der ersten zwei Kreise hindurchgehen. Also:

Fig. 35.



Die drei über den Diagonalen eines vollständigen Vierseits als Durchmessern beschriebenen Kreise schneiden sich in denselben zwei Punkten S und S', oder haben Eine gemeinschaftliche Sehne SS'.

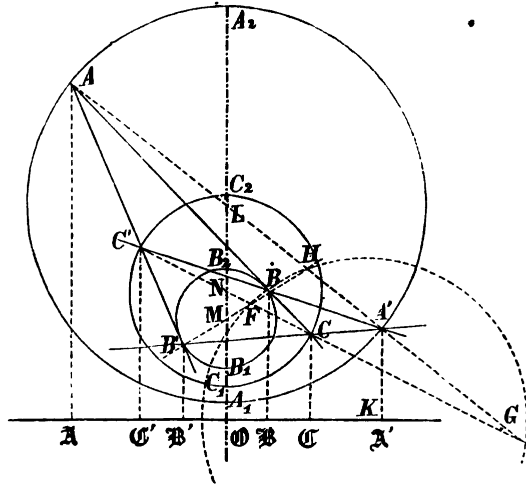
Hieraus folgt weiter: Die Mittelpunkte L, M, N der drei Diagonalen des Vierseits liegen in einer und derselben Graden.

5) Der erstere der vorstehenden Sätze wird als der Bodenmiller'sche, der andere als der Gauss'sche Satz aufgeführt. Man kann den Gauss'schen Satz nicht als eine Folgerung des Bodenmiller'schen hinstellen und letzterem auch nicht den obigen Ausdruck geben, wenn das Vierseit von der Art ist, dass die drei über den Diagonalen als Durchmessern beschriebenen Kreise nicht zum gegenseitigen Durchschnitt kommen. Die Durchschnitte werden aber immer fehlen, wenn (Fig. 36) von den einfachen Vierseiten, die in dem vollständigen enthalten sind (s. §. 60), das gewöhnliche $BCB'C'$, welches keine überschlagenen Seiten hat, zwei gegenüberliegende innere stumpfe und zwei gegenüberliegende innere spitze Winkel hat. In diesem Falle kann man den Beweis des Gauss'schen Satzes auf folgende Weise führen.

Man lege durch die Mittelpunkte L und M zweier Diagonalen

*) In Fig. 35 ist der Durchschnittspunkt von AB und $A'B'$ irrthümlich mit L statt mit C bezeichnet.

Fig. 36.



AA', BB' eine Grade und zu derselben durch einen (zunächst beliebigen) Punkt O eine Senkrechte, auf welche man die sechs Ecken des Vierseits senkrecht, also parallel der LM, projicire. Die somit erhaltenen Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ bilden nach vorhergehender Nummer 3) eine Involution. Weil aber die LM durch die Mitten von AA' und BB' gelegt ist, so muss auch $\mathfrak{A}O = O\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}O = O\mathfrak{B}'$ sein, d. h. die Involution ist (§. 82) eine symmetrische. Es ist daher auch $\mathfrak{C}O = O\mathfrak{C}'$, folglich auch $CN = NC'$. Die Grade LM geht somit ebenfalls durch den Mittelpunkt der dritten Diagonale.

Sind ferner F, G, H die gegenseitigen Durchschnitte der drei Diagonalen, von denen je zwei harmonische Punkte zu den Endpunkten der betreffenden Diagonale sind (§. 60 und 62, 1), ferner K der Mittelpunkt und r der Halbmesser des um das Dreieck FGH beschriebenen Kreises, so hat man (§. 51. X.) $LA^2 = LG \,.\, LH$ und $LG \,.\, LH = LK^2 - r^2$, folglich

$$\text{a)} \quad \begin{cases} LA^2 = LK^2 - r^2, & \text{ebenso ergiebt sich} \\ MB^2 = MK^2 - r^2, \\ NC^2 = NK^2 - r^2. \end{cases}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit MN, NL, LM und addirt sie hierauf, so kommt

b) $LA^2\,MN + MB^2 . NL + NC^2 . LM =$
$LK^2\,MN + MK^2 . NL + NK^2 . LM - r^2\,(MN + NL + LM)$.

Nun ist, weil L, M, N in grader Linie liegen,

$$MN + NL + LM = 0,$$

ferner nach dem erweiterten Satze in §. 8

$$LK^2 . MN + MK^2 . NL + NK^2 . LM = - LM . MN . NL;$$

somit reducirt sich b) auf

c) $LA^2 . MN + MB^2 . NL + NC^2 . LM + LM . MN . NL = 0$

oder, wenn endlich A_1 und A_2, B_1 und B_2, C_1 und C_2 die Durchschnittspunkte der Graden LMN mit den über AA', BB', CC' als Durchmessern beschriebenen Kreisen sind, also absolut $LA = LA_1 = LA_2$, $MB = MB_1 =$ u. s. w., ist:

d) $LA_1^2 . MN + MB_1^2 . NL + NC_1^2 . LM + LM . MN . NL = 0$.

Diese Gleichung zeigt aber nach §. 95 an, dass die Punkte A_1 und A_2, B_1 und B_2, C_1 und C_2 in Involution sind, oder

Die drei über den Diagonalen eines Vierseits als Durchmessern beschriebenen Kreise schneiden die durch die Mittelpunkte der Diagonalen gelegte Grade in drei involutorischen Punktepaaren.

Der Centralpunkt O dieser Involution liegt ausserhalb eines jeden involutorischen Abschnittes, also auch ausserhalb eines jeden der drei über den Diagonalen beschriebenen Kreise, wenn die Punkte eines jeden Abschnittes gleichartig bezüglich eines andern Abschnittes sind, oder wenn die Abschnitte nicht in einander eingreifen (§. 74), wenn also auch die Kreise nicht einander schneiden.

Man kann in diesem Falle eine durch O zu LMN senkrecht gelegte Grade als die gemeinschaftliche imaginäre (ideale) Sehne der drei Kreise — gewöhnlich Chordale genannt — betrachten und es wird in dem folgenden Capitel gezeigt werden, dass sich auch zwei imaginäre Durchschnittspunkte der drei Kreise sowie der gemeinschaftlichen Sehne in der Ebene der Figur aufstellen lassen, welche nichts anderes als die (reellen) Doppelpunkte der Involution A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 sind, und die reellen Durchschnittspunkte dreier sich schneidender Kreise mit ihrer gemeinschaftlichen reellen Sehne vertreten*).

---

*) Aus den Gleichungen a) folgt durch Subtraction einer von der anderen

$$LA^2 - MB^2 = LK^2 - MK^2$$
$$LA^2 - NC^2 = LK^2 - NK^2,$$

Greifen indess die involutorischen Abschnitte A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 in einander ein (Fig. 35), so liegt der Centralpunkt O auf dem ihnen gemeinschaftlichen Stücke der Graden LMN; die über den Abschnitten als Durchmessern beschriebenen Kreise schneiden sich in denselben zwei Punkten S und S', deren Verbindungsgrade SS als gemeinschaftliche Sehne der drei Kreise durch den Centralpunkt geht. (Die Doppelpunkte der Involution sind in diesem Falle imaginär und werden, wie später gezeigt werden wird, durch die beiden Punkte S und S' vertreten, s. §. 125.)

---

welches, wie später sich zeigen wird, zwei charakteristische Gleichungen der Chordale sind und hier anzeigen, dass die Chordale der drei Kreise über den Diagonalen als Durchmessern durch den Mittelpunkt K des um F, G, H beschriebenen Kreises geht, eine wohl von Herrn Möbius (s. Berichte der K. S. Gesellsch. d. Wiss. z. Leipzig 1854, S. 89) zuerst bemerkte Eigenschaft der Chordale der drei Kreise.

Fünftes Capitel.

Geometrische Deutung und Construction imaginärer Werthe und Formen; complexe Doppelverhältnisse und Involutionen.

---

§. 101.

Vorbemerkungen. In den beiden vorhergehenden Capiteln ist es nicht selten vorgekommen, dass, wenn zwischen gegebenen und gesuchten Abschnitten einer Graden eine oder mehrere Gleichungen des zweiten Grades bestehen, die gesuchten Abschnitte und deren Grenzpunkte unter gewissen Umständen einen imaginären (oder auch complexen) Ausdruck erhielten. In diesem Falle wurden die Punkte oder Abschnitte nach der zeither üblichen Ansicht, dass einem imaginären Rechnungselement ein unmögliches Constructionselement entspreche, einstweilen als unconstruirbar hingestellt, oder wenigstens ihre Construction nicht weiter bemerkt. Man weiss aber jetzt, dass ein solcher Punkt oder Abschnitt zwar für die Grade, in welcher er eigentlich liegen soll, als unmöglich zu bezeichnen ist, wohl aber in einer durch die Grade gelegten Ebene als reeller Punkt oder Abschnitt construirt werden kann. Der Lehrsatz, auf welchen sich die ursprünglich nur auf das Bereich einer Graden beschränkte Relation zwischen den gegebenen und gesuchten (variabelen) Elementen bezieht und welcher durch die Bedingungen, unter denen eine imaginäre Beziehung hervortritt, eine Einschränkung zu erleiden scheint, erhält somit durch die neue Deutung und das neue Princip der Construction eine Erweiterung; das Bereich seiner Giltigkeit wird vergrössert oder be-

stimmter gesagt, aus den longimetrischen Beziehungen gehen entsprechende planimetrische hervor.

Die Deutung und Einführung imaginärer Elemente in die Geometrie ist, allgemein aufgefasst, ein Mittel geworden, Ausnahmen von Regeln zu beseitigen, verschiedene Specialsätze unter einem höhern Gesichtspunkte aufzufassen und zu einem allgemeinern Satze zu vereinigen. Jeder derartige Vorgang in der Wissenschaft ist nun nicht ohne gleichzeitige Aufstellung neuer oder erweiterter Begriffe und Definitionen möglich. Sollen diese aber einen wirklichen Fortschritt der Wissenschaft bedingen, so müssen in ihnen nicht blos die Keime und Elemente für jene Erweiterung der Wissenschaft enthalten sein und letztere folgerichtig und ungezwungen aus ihnen sich deduciren lassen, sondern es müssen auch die frühern Fundamentalbegriffe in ihnen ohne innern Widerstreit liegen, sowie nicht minder die daraus entwickelte neue Form der Wissenschaft die früheren nur assimiliren, nicht gänzlich umstossen oder vernichten darf.

Indem hier die Behandlung und Umformung*) imaginärer und complexer Ausdrücke vorausgesetzt wird, soll im Folgenden zunächst die Theorie ihrer geometrischen Darstellung**) an die im ersten Capitel gegebenen Vorbemerkungen (§. 1—8) geknüpft werden.

So lange die gradlinigen Abschnitte als zu nur einer Graden gehörig angesehen werden, bedarf es zu ihrer Unterscheidung ausser ihrer Grösse oder Länge nur noch des Zeichens, welches ihre Richtung als mit der angenommenen Grundrichtung der Graden übereinstimmend oder als entgegengesetzt bezeichnet. Hierauf gründet sich die Anwendung der Zeichen + und —, sowie die denselben entsprechende Regel für die Stellung der Grenzbuchstaben eines Abschnittes, aus welcher unmittelbar mehrere allgemeine Relationen für drei und mehrere Punkte und die von ihnen begrenzten Abschnitte einer Graden sich ergeben (§. 1—6). Geht man aber aus dem engern Bereich einer einzigen Graden heraus in das Gebiet der Ebene über und betrachtet Strecken oder Abschnitte von

*) Man vergleiche darüber die Lehrbücher über Analysis, u. a. Schlömilch, Handbuch der algebraischen Analysis, 2. Auflage. §§. 50—68.

**) Nach einer zuerst von Herrn Drobisch (Berichte d. K. S. Gesellschaft d. Wissensch. 2. Bd. (1848) S. 171) gegebenen Entwickelung.

Graden nicht blos von einer oder der entgegengesetzten, sondern von allen möglichen Richtungen, welche sie in der Ebene liegend haben können, so reichen auch zur vollständigen Bezeichnung der Abschnitte (nach Grösse und Richtung) die beiden Zeichen $+, -$ nicht mehr aus. Ist nämlich von der Strecke AB die Länge und der Anfangspunkt A bestimmt, so kann, wenn dieselbe in einer durch A gelegten Graden liegen soll, der Punkt B nur an zwei Stellen der Graden liegen, welche zu beiden Seiten von A gleichweit um die bestimmte Länge abstehen, und die beiden diesen Lagen von B entsprechenden Abschnitte der Graden werden dem Princip der Zeichen gemäss durch $+AB$ und $-AB$ oder durch AB und BA bezeichnet und unterschieden. Wird dagegen die Voraussetzung, dass AB in einer bestimmten durch A gelegten Graden enthalten sei, mit derjenigen, dass sie in einer durch A gelegten Ebene liegen soll, vertauscht, so kann B in allen Punkten einer von A aus als Mittelpunkt, mit der Länge von AB als Radius beschriebenen Kreislinie liegen oder die Strecke AB kann alle möglichen Richtungen der Radien dieses Kreises haben. Soll also eine bestimmte Lage von B oder eine bestimmte Richtung von AB angedeutet werden, so muss zur Bezeichnung AB als der absoluten Länge der Strecke noch etwas hinzugefügt werden, das deren Richtung determinirt. Diese Determination kann, wie die verschiedenen Coordinatenmethoden zeigen, ihrer Form nach sehr verschieden gewählt werden. Eine der einfachsten Formen dafür ist diejenige, nach welcher die Richtung von AB durch den Winkel angegeben wird, den diese Strecke mit einer ein für allemal festgelegten Graden oder Richtungsaxe x bildet. Denn bezeichnet man wie üblich den Winkel zweier Graden als den Richtungsunterschied derselben, so liegt die angegebene Determination der Richtung einer Graden durch den Winkel derselben mit der Richtungsaxe als reine Umkehrung dieser Definition sehr nahe. Es bleibt mithin noch übrig, die Form der Verbindung anzugeben, in welche der Winkel oder eine denselben bezeichnende Grösse mit dem absoluten Längenausdruck AB gebracht werden soll, damit die bezeichnete Strecke sowohl nach Grösse wie nach Richtung vollständig und nach den üblichen Rechnungsoperationen hinreichend flexibel bezeichnet ist. Mit andern Worten: es ist die Funktion zu bestimmen, nach welcher die zur Strecke gehörige Winkel- und Längengrösse mit einander zu verbinden ist.

§. 102.

Richtungsfactor einer Strecke. Es bezeichne $[AB]$ eine Strecke nach Grösse und Richtung zugleich aufgefasst, AB die Strecke von derselben Länge, wenn sie ihrer Richtung nach mit einer in der Ebene angenommenen Richtungsaxe übereinstimmt (parallel oder gleichgerichtet mit x ist)*), ferner α den Winkel $x^\wedge[AB]$ oder $AB^\wedge[AB]$ (oder α, wie üblich, die Länge des dem Winkel $x^\wedge[AB]$ entsprechenden Bogens eines Kreises, dessen Radius $= 1$ ist) und

$$\Phi\,(AB,\ \alpha)$$

die zu bestimmende Funktion, welche dem Symbol $[AB]$ gleichbedeutend ist. Setzt man zur Strecke $[AB]$ ein Stück $[BC]$ in derselben Richtung hinzu, so bildet dasselbe, so wie auch die Grade $[AC]$ mit der Richtungsaxe x (oder resp. mit BC, AC) denselben Winkel α. $[BC]$ und $[AC]$ müssen demnach durch Funktionen von derselben Form, in welchen α unverändert vorkommt, AB dagegen resp. durch BC und AC vertreten ist, wiedergegeben werden; d. h. man hat

$$[BC] = \Phi\,(BC,\ \alpha);\quad [AC] = \Phi\,(AC,\ \alpha).$$

Da aber $[BC]$ und $[AC]$ mit $[AB]$ in einer Graden liegen, und einerlei Richtung haben, so muss in diesem Falle die Relation

$$[AB] + [BC] = [AC]$$

ebenso gut wie $AB + BC = AC$ (§. 2) gelten. Man hat somit auch

$$\Phi\,(AB,\ \alpha) + \Phi\,(BC,\ \alpha) = \Phi\,(AC,\ \alpha)$$

oder

$$1)\qquad \Phi\,(AB,\ \alpha) + \Phi\,(BC,\ \alpha) = \Phi\,(\overline{AB + BC},\ \alpha)$$

Dieser Funktionalgleichung wird nun einfach Genüge geleistet, wenn man AB, BC, $\overline{AB + BC}$ als absolute Factoren zu irgend einer andern Funktion von α, welche durch

$$\varphi\,(\alpha)$$

bezeichnet werde, annimmt, d. h. wenn man

$$2)\qquad \Phi\,(AB,\ \alpha) = AB\,.\,\varphi\,(\alpha)$$

setzt, wobei AB die oben bezeichnete Bedeutung als einer mit der Richtungslinie übereinstimmenden Strecke hat.

Es ist demnach noch die Form von $\varphi\,(\alpha)$ zu bestimmen. Zu dem Ende nehme man eine andere Strecke $[AB']$ an (Fig. 37), welche

*) Demnach auch den absoluten Werth der Länge von $[AB]$.

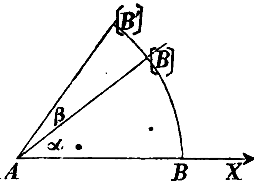


Fig. 37.

mit $[AB]$ den Winkel β, mit x oder AB' also den Winkel $\alpha + \beta$ bilde, übrigens aber von derselben Länge wie $[AB]$ sei. Für dieselbe wird nun

$$[AB'] = AB' \,.\, \varphi\,(\alpha + \beta),$$

oder, weil absolut $AB' = AB$ ist,

$$3) \qquad [AB'] = AB \,.\, \varphi\,(\alpha + \beta)$$

sein. Da aber $[AB']$ mit $[AB]$ den Winkel β bildet, so kann man, insofern $[AB']$ auch auf $[AB]$ als Richtungslinie sich beziehen lässt, setzen

$$[AB'] = [AB] \,.\, \varphi\,(\beta).$$

Substituirt man nach 2) $AB \,.\, \varphi\,(\alpha)$ für $[AB]$, so ergiebt sich

$$[AB'] = AB \,.\, \varphi\,(\alpha) \,.\, \varphi\,(\beta)$$

und in Verbindung mit 3) nach Weglassung des gemeinschaftlichen Factors AB

$$4) \qquad \varphi\,(\alpha + \beta) = \varphi\,(\alpha) \,.\, \varphi\,(\beta).$$

Dieser Gleichung entspricht die allgemeine Exponentialgleichung

$$a^{\alpha + \beta} = a^{\alpha} \,.\, a^{\beta}$$

und man hat somit

$$[AB] = a^{\alpha} \,.\, AB,$$

worin a eine noch näher zu bestimmende Constante ist. Dieselbe lässt sich aber durch zwei zusammengehörige particuläre Werthe von $[AB]$ und α ermitteln. Nimmt man nämlich an, dass der Winkel von x und $[AB]$ einem gestreckten gleich ist, wofür $[AB]$ in $-AB$ und α in π übergeht, so wird aus der letzten Gleichung

$$-AB = a^{\pi} \,.\, AB,$$

woraus

$$(-1) = a^{\pi} \text{ und } a = (-1)^{\frac{1}{\pi}}$$

folgt. Betrachtet man also von zwei Punkten A und B der Ebene den ersteren als Anfangs-, den andern als Endpunkt eines gradliuigen Abschnitts, so wird derselbe sowohl nach Länge wie nach Richtung durch das Product seiner absoluten Länge und eines Factors $(-1)^{\frac{\alpha}{\pi}}$, welcher der Richtungsfactor heisse, d. i. durch

$$A) \qquad (-1)^{\frac{\alpha}{\pi}} \,.\, AB$$

bezeichnet; dabei ist α die in Theilen des Halbmessers $=1$ ausge-

drückte Länge des Bogens, durch welchen der Neigungswinkel $x^\wedge AB$ des gedachten Abschnittes gegen eine in der Ebene festgelegte Richtungsaxe x gemessen wird.

Die Beurtheilung der Winkelgrössen erfolgt übrigens ganz nach den §. 9 u. f. erörterten Principien.

Statt des eben genannten Ausdrucks soll bisweilen als gleichbedeutend der symbolische

B) $$[AB]_\alpha,$$

welcher nun keiner Erläuterung mehr bedarf, oder auch, wenn Missverständniss nicht zu befürchten ist, der abgekürzte

$$[AB],$$

wobei $\alpha = x^\wedge AB$ zu ergänzen ist, zur Anwendung kommen. Ebenso bedeutet dann $[BC]$ oder $[BC]_\beta$ so viel als $(-1)^{\frac{\beta}{\pi}} . BC$, wobei unter β der Winkel oder Bogen $x^\wedge BC$ zu verstehen ist.

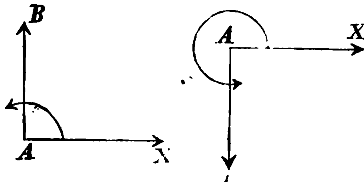
§. 103.

Besondere Werthe des Richtungsfactors. 1) Setzt man $\alpha = \frac{\pi}{2}$, oder den Winkel des Abschnittes und der Richtungsaxe als einen rechten voraus, so hat man

$$[AB]_{\frac{\pi}{2}} = (-1)^{\frac{1}{2}} . AB = AB . \sqrt{-1} = i . AB,$$

wobei $\sqrt{-1}$, wie üblich, kurz durch i bezeichnet ist; d. h. der zur Längenbezeichnung irgend eines Abschnittes hinzugefügte sogenannte imaginäre Factor $\sqrt{-1} = i$ deutet eine senkrechte Richtung des Abschnittes zu der die positive Richtung repräsentirenden Richtungsaxe an. (Fig. 38a.)

Fig. 38a. u. 38b.



2) Setzt man $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, oder den Winkel des Abschnittes und der Richtungsaxe gleich drei Rechten voraus, so hat man

$$[AB]_{\frac{3\pi}{2}} = (-1)^{\frac{3}{2}} . AB$$
$$= -AB\sqrt{-1} = -iAB,$$

d. h. eine zur vorhergehenden entgegengesetzte Richtung für den Abschnitt. (Fig. 38 b.)

3) die Werthe $\alpha = 0$ und $\alpha = \pi$ geben

$$[AB]_0 = (-1)^0 . AB = + AB$$
$$[AB]_\pi = (-1) . AB = - AB$$

d. h. die beiden einander entgegengesetzten sogenannten reellen Werthe des Abschnittes. — Man erkennt somit, dass die beiden Zeichen + und —, als Richtungscoefficienten für gradlinige Abschnitte, particuläre Werthe eines allgemeinen Richtungsfactors $(-1)^{\frac{\alpha}{\pi}}$ sind, und dass in derselben Weise auch $\pm\sqrt{-1}$ als Richtungsfactoren für die beiden andern Cardinalrichtungen in der Ebene, d. h. für die beiden auf jenen senkrechten Richtungen, aufzufassen sind.

Hieraus erhellet noch, dass, wenn in einer Ebene eine der beiden reellen Richtungen — z. B. die positive — und eine der beiden imaginären — z. B. die positive — bestimmt sind, damit auch der positive oder negative Sinn für die Winkelgrössen angedeutet ist. (§. 9 u. d. f.)

4) Der Ausdruck $(-1)^{\frac{\alpha}{\pi}}$ kann auf verschiedene Weise in den bekannten

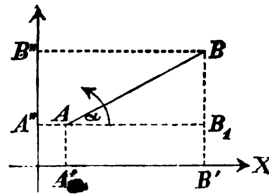
$$\cos\alpha + \sqrt{-1} . \sin\alpha \text{ oder } \cos\alpha + i \sin\alpha$$

verwandelt werden.*) Die entsprechende Gleichung

$$[AB]_\alpha = AB (\cos\alpha + i \sin\alpha)$$
$$= A'B' + i A''B'' = AB_1 + i B_1 B$$

(Fig. 39) giebt noch eine andere geometrische Deutung: $[AB]_\alpha$ ist die Summe der beiden rechtwinkligen Projectionen des Abschnittes auf zwei zu einander senkrechte Projectionsaxen, deren eine mit demselben den Winkel α bildet und der Richtungsaxe in der Ebene parallel ist.

Fig. 39.



*) Unter andern dadurch, dass man setzt

$$(-1) = \cos\pi + i \sin\pi$$

mithin nach dem Moivre'schen Satze

$$(-1)^{\frac{\alpha}{\pi}} = \cos\alpha + i \sin\alpha = e^{i\alpha}.$$

*) Bekanntlich nennt man einen Ausdruck wie

$$\mu \pm i\nu \text{ oder } \varrho\ (\cos\varphi \pm i \sin\varphi),$$

wobei

$$\varrho = \sqrt{\mu^2 + \nu^2}, \quad \cos\varphi = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}} \text{ und } \sin\varphi = \frac{\nu}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}$$

ist, einen complexen Ausdruck, μ oder $\varrho \cos\varphi$ den reellen, $i\nu$ oder $i\varrho \sin\varphi$ den imaginären Theil desselben, ferner ϱ den Modulus und φ die Amplitude. Nach dem Vorhergehenden ist die geometrische Deutung der genannten Grössen einfach die, dass, wenn man den complexen Werth durch einen gradlinigen Abschnitt darstellt, der Modulus die absolute Länge desselben, die Amplitude den Winkel bezeichnet, welchen die durch die Aufeinanderfolge der Buchstaben bezeichnete Richtung des Abschnittes mit der positiven Richtung einer Richtungsaxe bildet, ferner der reelle Theil gleich der rechtwinkligen Projection des Abschnittes auf die Richtungsaxe und der imaginäre Theil gleich der rechtwinkligen Projection auf eine zur Richtungsaxe senkrechte Grade ist.

§. 104.

Zusätze. 1) Die Relation $BA = -AB$ (§. 1) gilt auch für complexe Ausdrücke, oder es ist

I. $[BA]_\alpha = -[AB]_\alpha$ und allgemein $[BA] = -[AB]$.

Denn

$$[BA]_\alpha = (-1)^{\frac{\alpha}{\pi}} . BA = -(-1)^{\frac{\alpha}{\pi}} AB$$
$$= (-1)^{\frac{\pi+\alpha}{\pi}} . AB,$$

d. h. $[BA]_\alpha$ ist ein Abschnitt dessen durch AB bezeichnete Richtung mit der Richtungsaxe einen Winkel $\pi + \alpha$ bildet, also die entgegengesetzte Richtung von $[AB]_\alpha$ hat, im übrigen aber demselben an Länge gleich ist, folglich ist

$$[BA]_\alpha = -[AB]_\alpha.$$

2) Zugleich ergiebt sich hieraus, dass auch

1) $\qquad [AB]_{\pi+\alpha} = -[AB]_\alpha = [BA]_\alpha$

ist, was sowohl mit §. 13, 3 übereinstimmt, oder eigentlich derselbe Satz ist, als auch mit 4) des vorherg. §., wenn $\pi + \alpha$ statt α gesetzt wird.

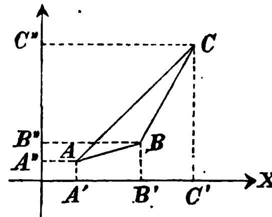
§. 105.

Lehrsatz. Sind A, B, C drei beliebige im Allgemeinen nicht in einer Graden liegende Punkte, so ist immer

$$\text{II.} \quad \begin{cases} [AB] + [BC] + [CA] = 0, \\ [AB] + [BC] = [AC], \quad [AB] - [AC] = [CB] \text{ etc.} \end{cases}$$

Bilden die Seiten AB, BC, CA des Dreiecks ABC (Fig. 40) mit der Richtungsaxe x, resp. die Winkel γ, α, β, sind $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ die rechtwinkligen Projectionen der Dreiecksseiten auf diese Axe und $A''B''$, $B''C''$, $C''A''$ die Projectionen auf eine zur x senkrechte Grade, so ist (103, 4. 5.)

Fig. 40.



$$[AB]_\gamma = AB\,(\cos\gamma + i \sin\gamma) = A'B' + i\,.\,A''B'',$$
$$[BC]_\alpha = BC\,(\cos\alpha + i \sin\alpha) = B'C' + i\,.\,B''C'',$$
$$[CA]_\beta = CA\,(\cos\beta + i \sin\beta) = C'A' + i\,.\,C''A'';$$

wobei $\sqrt{-1}$ wie oben durch i bezeichnet ist.

Da nun

$$A'B' + B'C' + C'A' = 0,$$
$$A''B'' + B''C'' + C''A'' = 0,$$

so ist auch

$$[AB[_\gamma + [BC]_\alpha + [CA]_\beta = 0.$$

Hieraus und mit Benutzung von I. ergeben sich die andern unter II. aufgeführten Beziehungen.

Anmerkung. Dieser Satz drückt die Zusammensetzung und Zerlegung (geometrische — auch innere — Addition und Subtraction) der Linien aus, deren sich insbesondere Herr Moebius allgemeiner und durchgreifender bedient hat, namentlich in seiner „Statik“ und in der „Mechanik des Himmels“. Stellen $[AB]$ und $[BC]$ nach Richtung und Grösse zwei auf einen Punkt wirkende Kräfte — oder die von ihnen hervorgebrachten Bewegungen — vor, so stellt $[AB] + [BC] = [AC]$ nach Richtung und Grösse die Resultante der Kräfte — die aus beiden zusammengesetzte Bewegung — vor. (Parallelogramm der Kräfte.)

§. 106.

Zusätze. 1) Die Gleichung der complexen Abschnitte

$$[AB]_\gamma + [BC]_\alpha + [CA]_\beta = 0$$

ist somit als der Complex der beiden Gleichungen

$$2) \quad \begin{cases} AB \cos \gamma + BC \cos \alpha + CA \cos \beta = 0 \\ AB \sin \gamma + BC \sin \alpha + CA \sin \beta = 0 \end{cases}$$

anzusehen, und ebenso lässt sich bekanntlich jede andere Gleichung mit complexen Ausdrücken in zwei Gleichungen spalten, von denen die eine die Beziehungen zwischen den reellen, die andere die zwischen den imaginären Grössen darstellt.

2) Aus den beiden Gleichungen 2) folgt noch

$$\frac{BC \cos \alpha}{\cos \gamma} + \frac{CA \cos \beta}{\cos \gamma} = \frac{BC \sin \alpha}{\sin \gamma} + \frac{CA \sin \beta}{\sin \gamma},$$

$$BC (\cos \alpha \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma) = CA (\sin \beta \cos \gamma - \cos \beta \sin \gamma),$$

$$BC : CA = \sin (\beta - \gamma) : \sin (\gamma - \alpha);$$

ebenso

$$CA : AB = \sin (\gamma - \alpha) : \sin (\alpha - \beta),$$

oder zusammengefasst:

$$AB : BC : CA = \sin (\alpha - \beta) : \sin (\beta - \gamma) : \sin (\gamma - \alpha).$$

Da nun

$$\alpha = x^\wedge BC, \quad \beta = x^\wedge CA, \quad \gamma = x^\wedge AB,$$

so ist (§. 11, II.)

$$\begin{aligned} \alpha - \beta &= x^\wedge BC - x^\wedge CA = CA^\wedge BC = - BC^\wedge CA \\ \beta - \gamma &= x^\wedge CA - x^\wedge AB = AB^\wedge CA = - CA^\wedge AB \\ \gamma - \alpha &= x^\wedge AB - x^\wedge BC = BC^\wedge AB = - AB^\wedge BC, \end{aligned}$$

folglich

$$3) \quad AB : BC : CA = \sin BC^\wedge CA : \sin CA^\wedge AB : \sin AB^\wedge BC,$$

oder weil $BC^\wedge CA = 180^\circ + CB^\wedge CA = 180^\circ + BCA = 180^\circ - ACB$ ist,

$$AB : BC : CA = \sin ACB : \sin BAC : \sin CBA\text{*)}$$

---

*) Man kann derselben Beziehung auch folgenden Ausdruck geben. Seien a, b, c drei Grade einer Ebene, $a \cdot b$, $b \cdot c$, $c \cdot a$ ihre gegenseitigen Durchschnittspunkte, acb, bac, cba die drei zwischen diesen Durchschnittspunkten liegenden Abschnitte oder Seiten des Dreiseits, so ist

$$\sin a^\wedge b : \sin b^\wedge c : \sin c^\wedge a = acb : bac : cba,$$

wobei sowohl die Winkel nach einerlei Sinn, als auch die Seiten in ein und demselben aber beliebigen Zuge zu durchlaufen sind. (vergl. S. 12.)

d. i. die bekannte Relation zwischen den Seiten und Sinussen der gegenüberstehenden Winkel eines Dreiecks; wobei zugleich das Princip der Zeichen sowohl nach §. 9 und 10 als §. 16 beobachtet ist.

Die Anwendung dieses Princips auf die Proportion 3) lässt sich festhalten, wie auch die positiven Richtungen der drei Seiten des Dreiecks ABC bestimmt werden mögen. Denn sind allgemein a, b, c drei beliebige Grade in einer Ebene, von denen a und b in C, b und c in A, c und a in B sich schneiden, und sind die positiven Richtungen der durch A, B, C bestimmten Abschnitte und der Graden a, b, c bezeichnet durch

$$BC, \quad AC, \quad AB,$$

sind ferner α, β, γ die Winkel, welche a, b, c mit irgend einer Richtungslinie x bilden, wobei noch der positive Sinn beliebig festgesetzt werden mag, nach dem die Winkel (§. 9) als positiv gerechnet werden, so hat man nach §. 105 II. zunächst

$$[AB] + [BC] + [CA] = 0,$$

ferner, weil (104, 1)

$$[AC]_\beta = -[CA]_\beta = [CA]_{\pi+\beta} \text{ ist,}$$

$$[AB]_\gamma + [BC]_\alpha - [CA]_\beta = 0,$$

oder

$$[AB]_\gamma + [BC]_\alpha + [CA]_{\pi+\beta} = 0.$$

Hieraus ergiebt sich auf dieselbe Weise wie oben

$$AB : BC : (-CA) = \sin(\alpha - \beta) : \sin(\beta - \gamma) : \sin(\gamma - \alpha),$$

oder

$$AB : BC : CA = \sin(\alpha - \pi - \beta) : \sin(\pi + \beta - \gamma) : \sin(\gamma - \alpha)$$
$$= -\sin(\alpha - \beta) : -\sin(\beta - \gamma) : \sin(\gamma - \alpha).$$

Beide Ausdrücke sind, wie man sieht, dieselben und reduciren sich auf

$$AB : BC : AC = \sin BC^\wedge AC : \sin AC^\wedge AB : \sin AB^\wedge BC,$$

d. i. eine Proportion, die mit Berücksichtigung der nach §. 1 und 9 zu beurtheilenden Zeichen der Abschnitte, wie sie vorausgesetzt sind, und der Winkel vollständig mit der bereits aufgestellten (3) übereinstimmt.*)

---

*) Vergl. §. 35 und Möbius, Theorie d. Kreisverwandtschaft S. 532, Anmerkung, oder Abhandlungen d. K. S. Gesellschaft d. Wissensch. zu Leipzig, 1852. S. 45.

§. 107.

Reduction eines Vierecks auf ein Dreiek. Sowie die Gleichung $AB + BC + CA = 0$ der Ausgangspunkt für mehrere Relationen beliebiger Punkte einer Graden geworden ist, z. B. III. u. IV. in §. 4 u. 7; ebenso und ganz auf demselben Wege werden aus der entsprechenden mit complexen Abschnitten $[AB] + [BC] + [CA] = 0$ sich nicht weniger ähnlich gebildete Relationen zwischen complexen Abschnitten oder zwischen beliebigen Punkten einer Ebene ableiten lassen. So hat man demnach zwischen beliebigen Punkten einer Ebene

III. $[AB] + [BC] + [CD] + \ldots + [MN] + [NA] = 0.$

Desgleichen gilt zwischen vier beliebigen Punkten A, B, C, D einer Ebene und den dadurch bestimmten Abschnitten die Relation

IV. $[AB]\,[DC] + [BC]\,[DA] + [CA]\,[DB] = 0.$

Für die weitere Untersuchung der letzteren bezeichne man kurz durch a, b, c, a', b', c' nach Richtung und Grösse resp. die Abschnitte BC, CA, AB, DA, DB, DC, mit α, β, γ, α', β', γ' die Winkel $x^\wedge a$, $x^\wedge b$, $x^\wedge c$, $x^\wedge a'$, $x^\wedge b'$, $x^\wedge c'$. Diesen Bezeichnungen gemäss heisst zunächst die Gleichung IV.

$$[a]_\alpha\,[a']_{\alpha'} + [b]_\beta\,[b']_{\beta'} + [c]_\gamma\,[c']_{\gamma'} = 0$$

Da nun

$$[a]_\alpha\,[a']_{\alpha'} = aa'(-1)^{\frac{\alpha+\alpha'}{\pi}}$$
$$= aa'\big(\cos(\alpha+\alpha') + i\sin(\alpha+\alpha')\big)$$

ist und ebenso die beiden andern Producte umgeformt werden können, so giebt die Gleichung nach Trennung ihrer reellen Glieder von den imaginären die beiden folgenden

$$aa'\cos(\alpha+\alpha') + bb'\cos(\beta+\beta) + cc'\cos(\gamma+\gamma') = 0,$$
$$aa'\sin(\alpha+\alpha') + bb'\sin(\beta+\beta) + cc'\sin(\gamma+\gamma') = 0,$$

woraus, ebenso wie in §. 106 aus 2) die Proportion 3), hervorgeht

$$aa' : bb' : cc' = \sin(\beta+\beta'-\gamma-\gamma') : \sin(\gamma+\gamma'-\alpha-\alpha')$$
$$: \sin(\alpha+\alpha'-\beta-\beta').$$

Sind nun f, g, h drei Grade in der Ebene, welche mit der Richtungslinie x die Winkel resp. $\alpha+\alpha'$, $\beta+\beta'$, $\gamma+\gamma'$ bilden und sind H, F, G die Durchschnitte resp. von f und g, g und h, h und f, so hat man

$$[GH]_{\alpha+\alpha'} + [HF]_{\beta+\beta'} + [FG]_{\gamma+\gamma'} = 0$$

und

$$GH : HF : FG = \sin(\beta + \beta' - \gamma - \gamma') : \sin(\gamma + \gamma' - \alpha - \alpha') : \sin(\alpha + \alpha' - \beta - \beta'),$$

folglich

$$aa' : bb' : cc' = GH : HF : FG,$$

oder

$$\lambda) \qquad BC \,.\, DA : CA \,.\, DB : AB \,.\, DC = GH : HF : FG.$$

Da ferner nach den Voraussetzungen

$$\alpha + \alpha' = x^{\wedge}a + x^{\wedge}a' = x^{\wedge}f,$$
$$\beta + \beta' = x^{\wedge}b + x^{\wedge}b' = x^{\wedge}g,$$

so ist

$$(\alpha + \alpha' - \beta - \beta') = x^{\wedge}a - x^{\wedge}b + x^{\wedge}a' - x^{\wedge}b' = x^{\wedge}a - x^{\wedge}b' + x^{\wedge}a' - x^{\wedge}b = x^{\wedge}f - x^{\wedge}g;$$

folglich nach §. 12

$$g^{\wedge}f = b^{\wedge}a + b'^{\wedge}a' = b'^{\wedge}a + b^{\wedge}a';$$

oder, wenn man die Seiten des Dreiecks und Vierecks nach ihren Endbuchstaben bezeichnet und von jedem Winkel den entgegengesetzten nimmt,

$$\mu) \begin{cases} GH^{\wedge}HF = BC^{\wedge}CA + DA^{\wedge}DB = BC^{\wedge}DB + DA^{\wedge}CA; \\ \text{ebenso findet sich} \\ HF^{\wedge}FG = CA^{\wedge}AB + DB^{\wedge}DC = CA^{\wedge}DC + DB^{\wedge}AB; \\ FG^{\wedge}GH = AB^{\wedge}BC + DC^{\wedge}DA = AB^{\wedge}DA + DC^{\wedge}BC. \end{cases}$$

Die Beziehungen λ) und μ) besagen nun Folgendes: Construirt man zu einem vollständigen (§. 61) Viereck *ABCD* ein Dreieck *FGH*, dessen Seiten die aus den Winkeln des Vierecks nach μ) bestimmten Winkel mit einander bilden, so verhalten sich die Seiten des Dreiecks wie die Producte von je zwei gegenüberstehenden Seiten des vollständigen Vierecks. Es muss daher auch jedes dieser Producte kleiner als die Summe der beiden andern sein, und mit drei Graden, deren Längen jenen drei Producten proportional sind, wird stets ein Dreieck construirt werden können, dessen Winkel den in μ) angegebenen Winkelsummen — oder je nach dem Sinne, in welchem das Dreieck construirt ist, den Ergänzungen zu 360° davon — gleich sind.

Den Winkelausdrücken unter μ) können noch andere substituirt werden. Nach §. 13, 3 u. 4 ist

$GH^{\wedge}HF = HG^{\wedge}HF + 180^{\circ}$, $BC^{\wedge}CA = CB^{\wedge}CA + 180^{\circ}$ u. s. w.
$DA^{\wedge}CA = AD^{\wedge}AC$ u. s. w.

Demgemäss können die Gleichungen μ) auch geschrieben werden

$$HG^\wedge HF = CB^\wedge CA + DA^\wedge DB = BC^\wedge BD + AD^\wedge AC$$

u. s. w.

oder, wenn man den durch $HG^\wedge HF$ angedeuteten Winkel nach der gewöhnlichen Schreibweise mit GHF (§. 18) bezeichnet und rückwärts auch einen mit den üblichen drei Buchstaben genannten Winkel nur in diesem Sinne auffasst:

$$\mu') \quad \begin{cases} GHF = BCA + ADB = CBD + DAC, \text{ ebenso} \\ HFG = CAB + BDC = ACD + DBA, \\ FGH = ABC + CDA = BAD + DCB. \end{cases}$$

Weil endlich $BCA = -ACB$, $CBD = -DBC$ u. s. w. ist (§. 18), so können statt der Ausdrücke unter μ') auch folgende gesetzt werden

$$\mu'') \quad \begin{cases} GHF = ADB - ACB = DAC - DBC, \\ HFG = BDC - BAC = DBA - DCA, \\ FGH = CDA - CBA = DCB - DAB. \end{cases}$$

Die Gleichungen λ), μ), μ'), μ'') gelten übrigens, wie auch die positiven Richtungen der Seiten des vollständigen Vierecks sowie des Dreiecks festgesetzt werden. Denn die Gleichung II. §. 105 schliesst die Beziehungen 2) und 3) §. 106 ganz allgemein und so ein, dass diese von einer besondern Richtung der Abschnitte in II. unabhängig sind, ferner ist die Gleichung IV. ebenso allgemein aus II. abgeleitet, mithin können auch alle aus IV. nach denselben Principien gemachten Folgerungen, wie λ) . . . μ''), keine besondere Voraussetzung einschliessen, nach welcher eine der beiden Richtungen einer jeden Vierecks- oder Dreiecksseite als die ausschliesslich positive anzunehmen wäre.

Uebrigens kann man sich auch in eben der Weise davon überzeugen, wie dasselbe bezüglich der Relation 3) dargethan worden ist.

Die Resultate λ), μ') oder μ'') lassen sich wie folgt in Worte fassen:

Multiplicirt man die Maasszahlen der gegenüberstehenden Seiten eines vollständigen ebenen Vierecks (A, B, C, D), so kann man mit drei Linien, welche den drei Producten ($AB.DC$, $BC.DA$, $CA.DB$) proportional sind, ein Dreieck (FGH) construiren. Jeder Winkel (wie H) dieses Dreiecks ist dem Unterschiede der Winkel des

Vierecks ($ADB - ACB$ oder $DAC - DBC$) gleich, unter welchen von den zwei Seiten (AB oder DC), deren Product der dem Winkel (H) gegenüberstehenden Dreieckseite (FG) proportional ist, jede von den beiden übrigen Punkten des Vierecks (AB von D und C oder DC von A und B) aus erscheint.

Sind daher bei einem vollständigen Viereck von den drei Verhältnissen zwischen den gedachten drei Producten und von den drei Winkeldifferenzen — sind von diesen sechs Stücken irgend zwei gegeben, so kann man daraus die vier übrigen finden — und zwar ebenso, wie man bei einem Dreieck aus irgend zweien der sechs Stücke, nämlich der drei Verhältnisse zwischen den Seiten und der drei Winkel, die übrigen vier bestimmen kann.

§. 108.

Zusätze. 1) Bilden drei der vier Punkte etwa A, B, C ein gleichseitiges Dreieck, so verhalten sich die Producte der Vierecksseiten, wie die Entfernungen der genannten drei Punkte vom vierten, oder wie DC, DA, DB. Aus diesen kann also unmittelbar das Dreieck (GHF) construirt werden, dessen Winkel den Winkeldifferenzen $ADB - ACB$ u. s. w. gleich sind.

2) Liegen A, B, C, D in einem Kreise und zwar C und D auf verschiedenen Seiten von AB, so ist nach §. 21

$$ADB - ACB = 180^0; \quad BDC - BAC = 0, \quad CDA - CBA = 0,$$

folglich nach μ'')

$$1)\ GHF = 180^0, \quad 2)\ HFG = 0, \quad 3)\ FGH = 0.$$

Jede dieser Gleichungen deutet an, dass die Punkte F, G, H in grader Linie liegen und zwar nach 1) insbesondere, dass der Punkt H zwischen F und G sich befindet. Man hat somit auch in absolutem Sinne $GH + HF = FG$. Substituirt man diese Relation in λ), so ergiebt sich

$$BC.DA + CA.DB = AB.DC,$$

d. i. der Ptolemäische Satz zwischen den Seiten und Diagonalen eines Sehnenvierecks, in welchem nur die Diagonalen nicht die Seiten innerhalb des Kreises zum Durchschnitt kommen. Auf ein ähnliches Resultat wird man auch geführt, wenn man die Punkte C und D zu einerlei Seite der AB liegend annimmt.

§. 109.

Einfache Verhältnisse zwischen complexen Abschnitten, oder complexe Verhältnisse. 1) Sind A, B, C drei nicht in grader Linie liegende Punkte und setzt man das Verhältniss zwischen den complexen Abschnitten $[AC]$, $[CB]$

$$\frac{[AC]}{[CB]} = \lambda + i\,\mu = \varrho\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

wobei $\varrho = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$ und $tg\,\varphi = \frac{\mu}{\lambda}$ ist, so ergeben sich aus den vorhergehenden Erörterungen für ϱ und φ noch folgende einfache Beziehungen zur Figur ABC.

Wenn die Richtungen AC und CB mit einer Richtungslinie x der Ebene die Winkel

$$x^{\wedge}AC = \beta, \quad x^{\wedge}CB = \alpha$$

bilden, so ist

$$\frac{[AC]}{[CB]} = \frac{AC}{CB}\cdot(-1)^{\frac{\beta-\alpha}{\pi}} = \varrho\cdot(-1)^{\frac{\varphi}{\pi}}$$

mithin

$$1)\ \varrho = \frac{AC}{CB} \text{ und } 2)\ \beta - \alpha = \varphi$$

wobei $\frac{AC}{CB}$ das absolute Längenverhältniss der Abschnitte AC und CB bedeutet, in der Winkelgleichung dagegen die einmal angenommenen Richtungen der Abschnitte festzuhalten sind. Nun ist

$$\begin{aligned}\beta - \alpha &= x^{\wedge}AC - x^{\wedge}CB = CB^{\wedge}AC \\ &= CB^{\wedge}CA + \pi = BCA + \pi = \pi - ACB,\end{aligned}$$

oder

$$\varphi = \pi - ACB.$$

Hiernach lässt sich das betrachtete Verhältniss zwischen complexen Abschnitten auch wie folgt umschreiben:

$$\frac{[AC]}{[CB]} = \frac{AC}{CB}\left(\cos(\pi - ACB) + i\sin(\pi - ACB)\right)$$

d. h. **Das complexe Verhältniss zweier Abschnitte hat zum Modulus das absolute Verhältniss der Abschnitte und zur Amplitude das Supplement (zu 180°) des von ihnen gebildeten Winkels.**

Andere gleichbedeutende Ausdrücke sind:

$$\frac{[AC]}{[CB]} = -\frac{AC}{CB}(\cos ACB - i \sin ACB),$$

$$= -\frac{AC}{CB}\cdot(-1)^{\frac{-ACB}{\pi}} = -\frac{AC}{CB}\cdot(-1)^{\frac{BCA}{\pi}}.$$

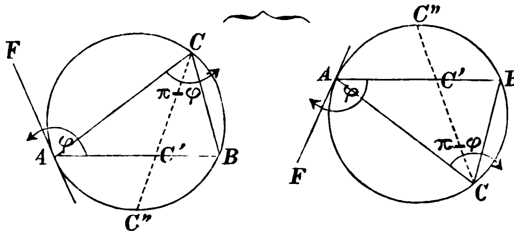
Dabei sind selbstverständlich immer die Winkel als in Bogentheilen eines Kreises mit dem Halbmesser $= 1$ ausgedrückt anzunehmen.

Das Verhältniss $\frac{[AC]}{[CB]}$ zwischen complexen Abschnitten soll kurz ein **complexes Verhältniss** heissen.

2) Sind demnach von den drei Punkten A, B, C die beiden ersten A und B der Lage nach, ferner der Werth $\lambda + i\mu = \varrho$ ($\cos\varphi$ $+ i \sin\varphi$) des complexen Verhältnisses $\frac{[AC]}{[CB]}$ gegeben, so hat man für den Punkt C nach dem Vorhergehenden folgende Construction:

Nachdem man den positiven Sinn, in welchem die Winkel zu rechnen sind, beliebig festgesetzt hat (Fig. 41 a. oder 41 b.) lege man in A den Winkel $BAF = \varphi$ an die AB an und beschreibe einen

Fig. 41 a. u. 41 b.



Kreis, welcher die AB zur Sehne und AT zur Tangente hat, theile AB in C' nach dem Verhältniss $AC' : C'B = \varrho : 1$, halbire in C'' denjenigen Bogen AB des Kreises, über welchem ein Peripheriewinkel $= \pi - \varphi$ ist — oder der mit φ in einerlei Sinne zu nehmen ist und ziehe die Grade $C''C'$, welche den Kreis zum zweiten Male [illegible]em gesuchten Punkte C trifft.

[illegible] hat nämlich, wegen $ACC'' = C''CB$ nach einem bekannten [illegible] absolut

$$1)\quad \frac{AC}{CB} = \frac{AC'}{C'B} = \varrho \text{ und } 2)\ ACB = \pi - \varphi,$$

[illegible]n erörterten Bedingungen erfüllt sind.

§. 110.

Zusatz. Nimmt man den Punkt C als einen unendlich entfernten der Ebene in irgend welcher Richtung an, so wird der Winkel $ACB = 0$ oder 2π, das Verhältniss $AC : CB = AC' : C'B$ absolut $= 1$, mithin das complexe Verhältniss

$$\frac{[AC]}{[CB]} = \frac{AC}{CB} (-1)^{\frac{\pi - ACB}{\pi}} = -1.$$

Umgekehrt kann das complexe Verhältniss $\frac{[AC]}{[CB]} = -1$ nur bestehen, wenn $\varrho = \frac{AC}{CB}$ absolut $= 1$ und $\varphi = \pi - ACB = \pi$ also $ACB = 0$ ist; Bedingungen, welche beide zugleich nur erfüllt werden, wenn C ein unendlich entfernter Punkt nach irgend welcher Richtung in der Ebene ist. Wollte man nämlich C in der Mitte des Abschnittes AB annehmen, wodurch zwar $AC : CB = 1$ sich erfüllt, so wäre doch ACB nicht $= 0$, sondern $= \pi$, mithin $\varphi = 0$ und $\frac{[AC]}{[CB]} = +1$. Andererseits würde, wenn C ein äusserer Punkt der Graden AB wäre, zwar $ACB = 0$, und $\varphi = \pi$ sein, aber das Verhältniss $\varrho = AC : CB$ könnte dabei nicht der Einheit gleich werden.

Da schliesslich bei jeder andern Lage von C im endlichen Bereiche der Ebene das Verhältniss $[AC] : [CB]$ einen vollständig complexen Werth behält, so sind hiermit alle Fälle, in denen C unter der gestellten Voraussetzung nicht unendlich entfernt liegt, ausgeschlossen, folglich u. s. w.

§. 111.

Complexes Doppelverhältniss. Sind A, B, C, D vier Punkte einer Ebene, von denen im Allgemeinen keine drei in einer Graden liegen und ist

$$\lambda + i\mu = \varrho (\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

der Werth des Doppelverhältnisses von vier complexen Abschnitten, oder, wie es kurz bezeichnet werde, des complexen Doppelverhältnisses

$$\frac{[AC]}{[CB]} : \frac{[AD]}{[DB]},$$

so haben λ und μ oder ϱ und φ nachstehende Beziehungen zur Figur. Sei

$$\frac{[AC]}{[CB]} = \varrho' (\cos \varphi' + i \sin \varphi'),$$

$$\frac{[AD]}{[DB]} = \varrho'' (\cos \varphi'' + i \sin \varphi''),$$

so ist $\varrho (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \frac{\varrho'}{\varrho''} \left(\cos (\varphi' - \varphi'') + i \sin (\varphi' - \varphi'')\right)$, mithin $\varrho = \frac{\varrho'}{\varrho''}$ und $\varphi = \varphi' - \varphi''$.

Nach §. 109, 1 ist aber

$$\varrho' = \frac{AC}{CB}, \quad \varrho'' = \frac{AD}{DB},$$

$$\varphi' = \pi - ACB, \quad \varphi'' = \pi - ADB,$$

folglich

$$1) \quad \varrho = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}; \quad 2) \quad \varphi = -(ACB - ADB),$$

und

$$\frac{[AC]}{[CB]} : \frac{[AD]}{[DB]} = \left(\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}\right) \left(\cos (ADB - ACB) + i \sin (ADB - ACB)\right).$$

Bezeichnet man auch bei dem complexen Doppelverhältniss $\frac{[AC]}{[CB]} : \frac{[AD]}{[DB]}$ die AB als den getheilten Abschnitt und C und D als dessen imaginäre Theilungspunkte, berücksichtigt man ferner, dass statt $-\varphi$ sich auch $2\pi - \varphi$ setzen lässt, so enthält letztere Gleichung folgenden Satz:

Der Modulus eines complexen Doppelverhältnisses ist das absolute Doppelverhältniss zwischen denselben Abschnitten; die Amplitude ist das zur vollen Umdrehung genommene Supplement der Differenz derjenigen Winkel, unter welchen der getheilte Abschnitt von den beiden imaginären Theilungspunkten aus erscheint.

Zusatz. Da

$$\frac{[AC]}{[CB]} : \frac{[AD]}{[DB]} = \frac{[AC]}{[CB]} \cdot \frac{[BD]}{[DA]}$$

ist, so hat man auch (§. 109)

$$\frac{[AC]}{[CB]}\cdot\frac{[BD]}{[DA]}=\frac{AC}{CB}\cdot\frac{BD}{DA}.(-1)^{\frac{\pi-ACB}{\pi}}.(-1)^{\frac{\pi-BDA}{\pi}}$$

$$=\frac{AC}{CB}\cdot\frac{BD}{DA}.(-1)^{\frac{2\pi-(ACB+BDA)}{\pi}}.$$

Man kann also den Modulus auch als ein Product zweier Verhältnisse, was schon an und für sich klar ist, und die Amplitude als das zur vollen Umdrehung genommene Supplement einer Winkelsumme darstellen. Letzteres folgt gleichfalls schon daraus, dass $ADB = -BDA$, folglich $\varphi = -(ACB - ADB) = -(ACB + BDA) = 2\pi - (ACB + BDA)$ ist.

§. 112.

Symbolische Bezeichnung der complexen Doppelverhältnisse, seines Modulus und seiner Amplitude. Den symbolischen Bezeichnungen der reellen Doppelverhältnisse entsprechend möge nun

$[ABCD]$ das complexe Doppelverhältn. $\frac{[AC]}{[CB]}:\frac{[AD]}{[DB]}=\frac{[AC]}{[CB]}\cdot\frac{[BD]}{[DA]}$

und

$(ABCD)$ das absolute Doppelverhältn. $\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DB}=\frac{AC}{CB}\cdot\frac{BD}{DA}$

andeuten, wenn die vier Punkte A, B, C, D in einer Ebene liegen. Obgleich die Bezeichnung des absoluten Doppelverhältnisses oder des Modulus eines complexen von derjenigen eines Doppelverhältnisses zwischen vier Punkten einer Graden — wobei bezüglich der Abschnitte das Princip der Zeichen festzuhalten ist — nicht unterschieden ist; so wird doch in jedem Falle aus dem Zusammenhange leicht sich ergeben, mit welcher Art von Doppelverhältnissen man es zu thun hat.

Die Zusammensetzung des Ausdrucks für die Amplitude eines complexen Doppelverhältnisses z. B. $\varphi = -(ACB - ADB)$ von $[ABCD]$, ist in leicht ersichtlicher Weise aus letzterem abzuleiten. Man bemerke hierzu, dass die Buchstaben A und B des getheilten Abschnittes in den beiden Winkelausdrücken gleichmässig in derselben Ordnung als resp. erster und letzter Buchstabe vorkommen und dass die Buchstaben C und D der imaginären Theilungspunkte in derselben Reihenfolge als Scheitelbuchstaben der Winkel auftreten. Hiernach lässt sich leicht aus jedem beliebigen Ausdruck

eines complexen Doppelverhältnisses die zugehörige Amplitude bestimmen, so kann man z. B. für $[MNPQ]$ zuerst das Schema

$$(M{*}N - M{*}N)$$

aus den Buchstaben des getheilten Abschnittes MN bilden und die durch * bezeichneten leeren Stellen durch die Buchstaben der imaginären Theilpunkte P, Q in derselben Ordnung genommen ausfüllen, wodurch man für die Amplitude nach Voraussetzung des —Zeichens den Winkelausdruck

$$-(MPN - MQN)$$

erhält. Da der Winkel schon an und für sich als eine Differenz angesehen werden kann, nämlich als Differenz der Richtungen seiner Schenkel, so mag vorstehende Winkeldifferenz $(ACB - ADB)$, oder die gleichbedeutende Winkelsumme $(ACB + BDA)$ auch als Doppelwinkel benannt und mit

$$\angle\, ABCD$$

oder schlechthin mit

$$ABCD$$

symbolisch bezeichnet werden. Bei dieser Bezeichnungsweise, welche einer von Herrn Möbius (s. Anmerk. zu §. 106) aufgestellten nachgebildet ist, ist noch der eigenthümliche schon in der Moivre'schen Formel enthaltene Parallelismus von Rechnungsoperationen zu bemerken, welcher bekanntlich zwischen natürlichen Zahlen und zwischen deren Logarithmen besteht, so dass gewisser Maassen die Doppelwinkel zu den zugehörigen Doppelverhältnissen in der Beziehung stehen, wie Logarithmen zu natürlichen Zahlen. Deutlicher geben dieses noch nachstehende Erörterungen oder der Algorithmus zwischen Doppelverhältnissen und Doppelwinkeln zu erkennen.

§. 113.

Doppelverhältnisse und Doppelwinkel derselben vier Punkte einer Ebene. Seien A, B, C, D vier Punkte einer Ebene, von denen im Allgemeinen keine drei in einer Graden liegen, so können zunächst ebenfalls 24 complexe Doppelverhältnisse zwischen den durch diese vier Punkte bestimmten sechs Abschnitten (den Seiten des vollständigen Vierecks) aufgestellt werden, wie dieses in §. 27 bezüglich vier Punkte einer Graden geschehen ist. Zwischen diesen Doppelverhältnissen finden nun nachstehende Beziehungen statt:

1) Man hat zunächst (vergl. I. §. 27)

I) $[ABCD] = [BADC] = [CDAB] = [DCBA]$.

Denn es ist mit Berücksichtigung von §. 104

$$\frac{[AC]}{[CB]} : \frac{[AD]}{[DB]} = \frac{[BD]}{[DA]} : \frac{[BC]}{[CA]} = \frac{[CA]}{[AD]} : \frac{[CB]}{[BD]} = \frac{[DB]}{[BC]} : \frac{[DA]}{[AC]};$$

aus gleichem Grunde hat man für die Moduli

1a) $(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA)$

und weil

$$[ABCD] = (ABCD)(-1)^{\frac{-ABCD}{\pi}};\ [BADC] = (BADC)(-1)^{\frac{-BADC}{\pi}}\ ^{*)}$$

u. s. w.

auch für die Amplituden oder Doppelwinkel

1b) $ABCD = BADC = CDAB = DCBA$.

Letztere Beziehung lässt sich auch, wie 1a) unmittelbar durch Auflösung der Ausdrücke in die gewöhnliche Form, in nachstehender Weise darthun.

$$\begin{aligned} ABCD = ACB - ADB &= CA^\wedge CB - DA^\wedge DB \\ &= x^\wedge CB - x^\wedge CA - x^\wedge DB + x^\wedge DA \\ &= x^\wedge DA - x^\wedge CA - (x^\wedge DB - x^\wedge CB) \\ &= AC^\wedge AD - BC^\wedge BD = CAD - CBD \end{aligned}$$

$= CDAB$; vergl. §. 107 μ') und μ'').

Ferner, weil $ACB = -BCA$, ist

$$ABCD = ACB - ADB = -BCA + BDA$$

$= BADC$, und ebenso

$$CDAB = DCBA.$$

Man kann somit auch von den Beziehungen 1a) und 1b) ausgehen und damit die Richtigkeit von I) erweisen.

Jedes complexe Doppelverhältniss, sein Modulus und seine Amplitude (Doppelwinkel) bleibt also unverändert, wenn man in den symbolischen Ausdrücken dieser Grössen die beiden letzten Buchstaben mit den beiden ersten und zwar beide entweder in derselben Reihenfolge oder in der entgegengesetzten mit einander vertauscht.

2) Es ist ferner

II) $[ABCD]\,[ABDC] = 1$,

wovon man sich ohne Weiteres durch Umsetzung der symbolischen

---

*) Wobei die Doppelwinkel wieder durch Bogen eines Kreises mit dem Halbmesser = 1 gemessen vorzustellen sind, vergl. 109.

Ausdrücke in die gewöhnlichen überzeugen kann. Hieraus oder aus dem gleichbedeutenden Ausdrucke

$$(ABCD)\,(ABDC)\,.\,(-1)^{\frac{-ABCD-ABDC}{\pi}}=1$$

folgt weiter

2a) $(ABCD)\,(ABDC)=1;$

2b) $ABCD+ABDC=0.$

Vertauscht man also in dem symbolischen Ausdrucke eines complexen Doppelverhältnisses die beiden letzten Buchstaben, so erhält man (wie bei reellen Doppelverhältnissen) das reciproke Doppelverhältniss, desgleichen auch den reciproken Modulus, wenn man in seinem Ausdrucke dasselbe vornimmt. Dieselbe Vertauschung im Ausdruck der Amplitude oder des Doppelwinkels giebt davon den **entgegengesetzten** Werth.

Nach I), 1a), 1b) findet dasselbe auch statt, wenn man die beiden ersten Buchstaben des betreffenden Ausdrucks vertauscht. Somit ist

$$[ABCD]=\frac{1}{[BACD]}=\frac{1}{[ABDC]},$$

$$(ABCD)=\frac{1}{(BACD)}=\frac{1}{(ABDC)},$$

$$ABCD=-BACD=-ABDC;$$ vergl. 107 μ') μ'').

3) Endlich hat man zwar in Folge der Beziehung

$$[AB].[CD]+[BC]\,[AD]+[CA]\,[BD]=0$$ (§. 107. IV.),

auch die Gleichung

III. $[ABCD]+[ACBD]=1,$

wornach das complementäre complexe Doppelverhältniss ebenso wie das reelle durch Vertauschung der beiden mittleren Buchstaben des symbolischen Ausdrucks erhalten wird: doch besteht keine dem ähnliche Abhängigkeit zwischen den beiden entsprechenden Modulis oder absoluten Doppelverhältnissen und ebenso wenig zwischen den beiden zugehörigen Amplituden oder Doppelwinkeln.

Denn da die Gleichung III. auf die angezogene Gleichung IV. in §. 107 sich stützt, so führt sie nach Einführung der zugehörigen Moduli und Amplituden nothwendiger Weise zu denselben Ergebnissen, welche in demselben §. aus IV. entwickelt worden sind,

insbesondere zu den Relationen λ) und μ), welche nach der mittlerweile aufgestellten Symbolik auch folgendermaassen ausgedrückt werden können:

$$AB.DC : BC.DA : CA.DB = \sin ABDC : \sin BCDA : \sin CADB$$

oder

$$AB.CD : BC.AD : CA.BD = \sin ABCD : \sin BCAD : \sin CABD,$$

mithin

$$3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{CA.BD}{BC.AD} = (ABCD) = \frac{\sin CABD}{\sin BCAD} \\ \frac{AB.CD}{CA.BD} = (BCAD) = \frac{\sin ABCD}{\sin CABD} \\ \frac{BC.AD}{AB.CD} = (CABD) = \frac{\sin BCAD}{\sin ABCD} \end{array} \right.$$

und hieraus ergiebt sich unmittelbar

$$3a) \qquad (ABCD)\,(BCAD)\,(CABD) = 1.$$

Eine entsprechende Beziehung zwischen den ebenso ausgedrückten Doppelwinkeln, nämlich

$$3b) \qquad ABCD + BCAD + CABD = \pi$$

ist darin enthalten, dass, wie §. 107 gezeigt worden ist, diese Doppelwinkel gleich den drei Winkeln eines Dreiecks sind, dessen Seiten den Producten $AB.CD$, $BC.AD$, $CA.BD$ proportional sind.

Die Relation 3a) erweist sich auch schon dadurch als giltig, dass man die Ausdrücke der drei Doppelverhältnisse in die gewöhnliche Form umsetzt; desgleichen 3b), wenn man die Doppelwinkel in die Winkelsummen, welche sie darstellen, auflösst, oder wenn man die Gleichungen

$$ACB + BAC + CBA = \pi$$
$$ADB + BDC + CDA = 0$$

von einander abzieht. Aus 3a) und 3b) folgt weiter dass

$$\text{IIIa.} \qquad [ABCD]\,[BCAD]\,[CABD] = -1$$

ist; eine Beziehung, die wiederum unmittelbar aus I., II., III. nach Analogie der in §. 29 gegebenen Ausführung gefolgert werden kann.

§. 114.

Zusätze. 1) Die in 3a), 3b) und IIIa. vorkommenden Doppelverhältnisse und Doppelwinkel gehören den durch die vier Punkte A, B, C, D bestimmten drei einfachen Vierecken

ACBD, *CBAD*, *BACD**)

an, deren Seiten in der durch die Stellung der Buchstaben angedeuteten Aufeinanderfolge genommen die Abschnitte oder Schenkel zu den obigen Doppelverhältnissen und Doppelwinkeln liefern. Somit sind zwar nach 1 a), 1 b) und 2 a), 2 b) die Doppelverhältnisse und Doppelwinkel, welche zu einem und demselben Viereck gehören, an eine Relation gebunden, indem sie entweder gleich sind, oder in reciproker Beziehung (resp. supplementärer B. zu 2π) stehen; dagegen sind zwei Ausdrücke, welche zwei verschiedenen Vierecken angehören, nur in complexer Form (nach III.) von einander abhängig darzustellen. Unabhängig aber bleiben von einander die Ausdrücke je zweier absoluter Doppelverhältnisse oder Doppelwinkel, die zwei verschiedenen Vierecken angehören. Erst drei Ausdrücke, von denen jeder einem andern einfachen Vierecke zugehört, sind durch die Relationen 3 a), 3 b) mit einander verbunden, so dass jeder Ausdruck eine Funktion von zwei den beiden übrigen Vierecken zugehörigen Ausdrücken ist.

Uebrigens ist leicht zu erkennen, dass mit Hülfe der Beziehungen 3), 3 a), 3 b) aus irgend zwei unabhängigen Doppelverhältnissen oder Doppelwinkeln oder aus einem Doppelverhältnisse und einem Doppelwinkel jedes andere Doppelverhältniss und jeder Doppelwinkel berechnet werden kann.

2) Noch sei einer bemerkenswerthen Relation zwischen den Winkeln je zweier gegenüberliegenden Seiten des durch die vier Punkte *A*, *B*, *C*, *D* bestimmten vollständigen Vierecks hier gedacht, womit auch die in §. 100 angegebenen involutorischen Beziehungen am vollständigen Viereck und Vierseit eine Ergänzung und Verallgemeinerung erhalten. Man hat allgemein

im Dreieck *BDC*, $BD:DC = \sin BCD : \sin DBC$

„ „ *CDA*, $CD:DA = \sin CAD : \sin DCA$

„ „ *ADB*, $AD:DB = \sin ABD : \sin DAB$,

wobei nach den Bemerkungen von §. 106 der positive Sinn, nach welchem die Winkel zu nehmen sind ganz unabhängig von der positiven Richtung des Zuges bleibt, in welcher man die Seiten jedes Dreiecks durchläuft. Wie aber auch der Sinn der Winkel und die

---

*) Die man erhält, wenn man den cyclischen Folgen von dreien der Punkte, z. B. *ACB*, *CBA*, *BAC* den vierten *D* an ein und derselben Stelle hinzufügt; vergl. §. 29 Anmerk.

Richtung der Seiten in jedem Dreieck angenommen wird, so bleibt doch immer das Verhältniss der Sinusse der genannten Winkel eines jeden Dreiecks positiv, wenn alle sechs Winkel nach einerlei Sinn beurtheilt werden. Man hat somit

$$\frac{\sin BCD . \sin CAD . \sin ABD}{\sin DBC . \sin DCA . \sin DAB} = 1$$

oder, weil $BCD = CB^\wedge CD = 180^0 + BC^\wedge CD$ u. s. w. ist

$$\frac{\sin BC^\wedge CD \,.\, \sin CA^\wedge AD \,.\, \sin AB^\wedge BD}{\sin BD^\wedge BC \,.\, \sin CD^\wedge CA \,.\, \sin AD^\wedge AB} = -1.$$

Bezeichnet man noch

BC, CA, AB, AD, BD, CD kurz mit
a, b, c, a', b', c'

wobei a und a', b und b', c und c' bei jeder Lage der Punkte A, B, C, D gegenüberliegende Seiten des vollständigen Vierecks sind, so hat man endlich für letztere Gleichung den Ausdruck

$$\frac{\sin a^\wedge c'}{\sin c'^\wedge b} \cdot \frac{\sin b^\wedge a'}{\sin a'^\wedge c} \cdot \frac{\sin c^\wedge b'}{\sin b'^\wedge a} = -1$$

oder $$\sin (abc, c'a'b') = -1$$

d. i. die sechs Seiten eines vollständigen Vierecks liegen involutorisch, dergestalt, dass je zwei gegenüberliegende Seiten zwei einander zugeordnete Grade sind*).

Legt man somit durch einen Punkt der Ebene sechs Strahlen, welche den sechs Seiten eines vollständigen Vierecks parallel sind, so erhält man ein involutorisches Strahlenbüschel.

---

*) Zu diesem Satze ergiebt sich auf demselben Wege ein entsprechender für das vollständige Vierseit. Sind a, b, c, d vier Grade einer Ebene, von denen im Allgemeinen keine drei durch einen Punkt zugleich gehen, so ist mit Benutzung der S. 12 bemerkten Bezeichnungen:

$$\sin b^\wedge d : \sin d^\wedge c = bcd : dbc$$
$$\sin c^\wedge d : \sin d^\wedge a = cad : dca$$
$$\sin a^\wedge d : \sin d^\wedge b = abd : dab,$$

mithin

$$\frac{bcd \,.\, cad \,.\, abd}{dbc \,.\, dca \,.\, dab} = -1$$

oder wenn man die Durchschnittspunkte

$b{\cdot}c$, $c{\cdot}a$, $a{\cdot}b$, $c{\cdot}d$, $a{\cdot}d$, $b{\cdot}d$ kurz durch
A, B, C, C', A', B'

Hieraus folgt nach §. 89, 2.:

Stehen zwei Paare von Gegenseiten des vollständigen Vierecks auf einander senkrecht, so stehen auch die beiden übrigen Gegenseiten auf einander senkrecht. Dieser Satz ist gleichbedeutend mit folgendem bekannten:

In einem Dreieck gehen die drei Perpendikel von den Ecken auf die Gegenseiten durch einen und denselben Punkt.

§. 115.

Complexe Doppelverhältnisse bei fünf und mehrern Punkten einer Ebene. Die in §. 31 aufgestellten Relationen bezüglich der Doppelverhältnisse zwischen fünf Punkten einer Graden lassen sich gemäss §. 111 ohne Weiteres auch auf die entsprechenden complexen Doppelverhältnisse zwischen fünf Punkten einer Ebene übertragen. Hieraus geht ferner ein gleiches Verfahren hervor, bei einem System von fünf Punkten einer Ebene aus zwei complexen Doppelverhältnissen, welche drei Punkte gemeinschaftlich haben, einen derselben zu eliminiren und jedes zwischen den übrigen vier Punkten bestehende complexe Doppelverhältniss zu bestimmen. Damit ist auch folgender, dem in §. 32 aufgestellten entsprechende Satz begründet:

Sind allgemein bei einem System von n Punkten einer Ebene $n-3$ von einander unabhängige complexe Doppelverhältnisse gegeben, so lassen sich daraus alle übrigen bestimmen.

Da nun jedes complexe Doppelverhältniss zwischen vier Punkten der Ebene nicht blos durch das gleichlautende absolute oder

---

also die Abschnitte

$$bcd,\ cad,\ abd,\ dbc,\ dca,\ dab$$
$$AC',\ BA',\ CB',\ B'A,\ C'B,\ A'C$$

bezeichnet:

$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=-1,$$

oder $(ABC, C'A'B')=-1$;

d. i. die sechs Eckpunkte des vollständigen Vierseits liegen involutorisch in der Ebene dergestalt, dass immer zwei gegenüberliegende ein zugeordnetes Punktepaar bilden. (Satz des Ptolemäus oder vielmehr Menelaus in Bezug auf ein Dreieck, dass von einer Transversale geschnitten wird; das Weitere über Involution von Punkten einer Ebene s. unten §. 126 u. folg.)

den Modulus und durch den zugehörigen Doppelwinkel gegeben ist, sondern nach vorhergehenden §. auch durch irgend zwei von einander unabhängige absolute Doppelverhältnisse, oder Doppelwinkel, oder durch irgend ein Doppelverhältniss und einen Doppelwinkel, welche zwischen denselben vier Punkten aufgestellt werden können und von einander unabhängig sind: so können die $n-3$ complexen Doppelverhältnisse auch durch $2(n-3)$ von einander unabhängige Elemente (Quaternionen) vertreten werden, welche theils absolute Doppelverhältnisse, theils Doppelwinkel sein können. Nennt man nach Möbius die absoluten Doppelverhältnisse und die Doppelwinkel zwischen vier Punkten gemeinschaftlich Quaternionen, so lässt sich der vorhergehende Satz auch in folgender Weise allgemeiner ausdrücken:

Sind von n Punkten einer Ebene $2n-6$ von einander unabhängige Quaternionen gegeben, so sind alle übrigen Quaternionen bestimmte Funktionen der gegebenen.

Daher muss bei einem Systeme von n Punkten einer Ebene zwischen $2n-5$ Quaternionen wenigstens eine Gleichung bestehen, welche die Abhängigkeit einer dieser Quaternionen von den übrigen $2n-6$ ausdrückt, und zwar nur eine Gleichung, wenn je $2n-6$ aller gegebenen $2n-5$ Quaternionen von einander unabhängig sind.

Ist $n=4$, so müssen zwei Quaternionen gegeben sein, die auch nach §. 113 und 114 zur Bestimmung der übrigen hinreichen. Die Gleichungen zwischen drei Quaternionen bei vier Punkten sind eben die daselbst unter 3), 3a), 3b) aufgestellten.

Ist $n=5$, so sind zur Bestimmung aller übrigen Quaternionen vier unabhängige nöthig. Zwischen 5 Doppelwinkeln oder 5 absoluten Doppelverhältnissen wird daher immer eine Gleichung bestehen.

§. 116.

Zurückführung eines complexen Doppelverhältnisses auf ein einfaches und umgekehrt.

Setzt man für das complexe Doppelverhältniss $[ABCD] = \varrho\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ den Punkt D als einen unendlich entfernten voraus, so reducirt sich das Doppelverhältniss gemäss §. 110 auf das einfache

$$-\frac{[AC]}{[CB]} = \varrho\,(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

oder
$$\frac{[AC]}{[CB]} = \varrho\,(\cos\varphi' + i\sin\varphi'),$$

wobei $\varphi' = \pi + \varphi$ gesetzt ist. Hieraus ergiebt sich weiter der Modulus $\varrho = AC : CB$ und der Winkel $ACB = \pi - \varphi' = -\varphi$ womit das Dreieck ACB vollständig bestimmt ist.

Umgekehrt kann ein complexes Verhältniss $[AC]:[CB]$ dreier Punkte der Ebene immer durch ein complexes Doppelverhältniss $[ABCD]$ mit demselben Modulus wiedergegeben werden, dessen Doppelwinkel $ABCD$ dem einfachen Winkel ACB einstimmig gleich ist, oder dessen Amplitude die des einfachen Verhältnisses um eine positive oder negative halbe Umdrehung übertrifft, und wobei zunächst der Punkt D als ein unendlich ferner in der Ebene vorausgesetzt ist. Es ist aber nach den vorhergehenden Erörterungen klar, dass dem Doppelverhältniss $[ABCD]$ ein anderes $[ABC'D']$ von demselben Werthe substituirt werden kann, in welchem keiner der vier Punkte ein unendlich entfernter der Ebene ist, und welches demzufolge denselben Modulus und denselben Doppelwinkel wie jenes hat.

Man kann somit das einfache complexe Verhältniss $[AC]:[CB]$ stets durch ein gleichwerthiges complexes Doppelverhältnisses $[ABC'D']$ ersetzen, dessen Modulus $(ABC'D')$ dem absoluten Verhältnisse $(AC):(CB)$ und dessen Doppelwinkel $ABC'D'$ dem einfachen Winkel ACB gleich ist. Hieraus folgt weiter, dass eine allgemeine Relation zwischen Punkten und geradlinigen Abschnitten in einer Ebene, in welcher nur einfache Verhältnisse und Winkel vorkommen, durch Einführung eines unendlich fernen Punktes der Ebene in eine Relation mit Doppelverhältnissen und Doppelwinkeln verwandelt werden kann, die aber auch ebenso allgemein giltig bleibt, wenn der eingeführte Punkt als ein endlicher der Ebene betrachtet wird. Mit andern Worten das in §. 40 entwickelte Princip zwischen Verhältnissen von Abschnitten einer Graden lässt sich auch auf complexe Verhältnisse von Abschnitten zwischen Punkten einer Ebene, sowie auf die Moduli und einfachen wie Doppelwinkel derselben ausdehnen. Da ferner diese Schlussfolgerungen mit derselben Evidenz sich auch rückwärts machen lassen, so geht daraus hervor, dass eine Relation von Doppelverhältnissen oder Doppelwinkeln zwischen Punkten einer Ebene dadurch, dass man einen

Punkt als den unendlich fernen annimmt, in eine entsprechende Relation von einfachen und Doppelverhältnissen oder Doppelwinkeln verwandelt werden kann, bei welcher ein Punkt weniger vorkommt. Diejenigen Doppelverhältnisse oder Doppelwinkel, in denen der als unendlich entfernt gesetzte Punkt vorkommt, gehen unmittelbar in einfache Verhältnisse oder Winkel über, die übrigen Doppelverhältnisse und Doppelwinkel können durch entsprechende Zerlegung als einfache dargestellt werden. Folgende Beispiele werden das Gesagte erläutern.

1) In derselben Weise wie §. 40 2) kann aus der Relation $[AB]+[BC]+[CA]=0$, oder

$$1=-\frac{[AC]}{[CB]}-\frac{[AB]}{[BC]}$$

die Gleichung

$$1=\frac{[AC]}{[CB]}:\frac{[AD]}{[DB]}+\frac{[AB]}{[BC]}:\frac{[AD]}{[DC]},$$

oder

$$1=[ABC'D']+[AC'BD']$$

hergeleitet werden, wobei zunächst D den unendlich fernen Punkt der Ebene, sodann D' und C' irgend wie endlich gelegene Punkte darstellen.

2) Umgekehrt folgt aus der letztern Gleichung, wenn man den Punkt D' als den unendlich fernen der Ebene annimmt

$$1=-\frac{[AC]}{[CB]}-\frac{[AB]}{[BC]}$$

$$=\frac{AC}{CB}(cos\ ACB-i\ sin\ ACB)+\frac{AB}{BC}(cos\ ABC-i\ sin\ ABC),$$

mithin

$$\frac{AC}{CB}sin\ ACB+\frac{AB}{BC}\ sin\ ABC=0,$$

oder

$$AB:CA=sin\ ACB:sin\ CBA.$$

Nun ist $(ABC'D')=AC:CB$ und $(AC'BD')=AB:BC$, ferner $ABC'D'=ACB$ und $AC'BD'=ABC$, oder $C'ABD'=CBA$, mithin auch

$$AB.C'D':C'A.BD'=sin\ ABC'D':sin\ C'ABD'$$

d. i. eine der unter 3) in §. 103 bemerkten Relationen, womit auch die in §. 98 erörterte Reduction eines Vierecks auf ein Dreieck ausgedrückt ist. (Vergl. auch §. 113, 3.)

3) Setzt man dabei bezüglich der Abschnitte AB, BC, CA und ihrer Richtungen besondere Beziehungen voraus, so werden dieselben und die daraus fliessenden Folgerungen durch Hinzunahme eines vierten Punktes D auf eine besondere Art von Vierecken übertragen. Wird z. B. das Dreieck ABC bei C rechtwinklig angenommen, oder ist $(CA:AB)^2 + (CB:BA)^2 = 1$, so geht zunächst der mit der Voraussetzung gegebene einfache rechte Winkel ACB in den Doppelwinkel $ABCD = \frac{\pi}{2}$ und die im pythagorischen Lehrsatz liegende Folgerung in

$$(CBAD)^2 + (CABD)^2 = 1,$$

oder

$$\overline{AC}^2 . \overline{BD}^2 + \overline{DA}^2 . \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 . \overline{CD}^2$$

über; ein Satz, der auch noch weiter unten nach andern Betrachtungen sich ergeben wird, und dessen nahe Beziehung zum pythagorischen hieraus ersichtlich ist.

4) Setzt man dagegen den Winkel ACB des Dreiecks gleich einem gestreckten voraus ist, also mit Beobachtung der Zeichen $AC + CB = AB$ und $(CA:AB) + (CB:BA) = -1$, so wird durch Hinzunahme eines vierten Punktes zunächst der Doppelwinkel $ABCD = \pi$ d. h. die vier Punkte A, C, B, D liegen in der genannten Folge in der Peripherie eines Kreises §. 21; sodann weil für einen unendlich fernen Punkt D $(CD:DB) = (CD:DA) = -1$ ist, aus $(CA:AB) + (CB:BA) = -1$

$$(CBAD) + (CABD) = 1,$$

oder

$$AC . BD + DA . BC = AB . CD,$$

d. i. der ptolemäische Satz; vergl. §. 108 und unten §. 120.

§. 117.

Aufgabe. Die Bemerkungen des vorstehenden §. begründen zugleich ein allgemeines Verfahren zu Lösung der aus §. 115 fliessenden Aufgabe:

Aus irgend $2n-6$ von einander unabhängigen Quaternionen (absoluten Doppelverhältnissen oder Doppelwinkeln) eines Systemes von n Punkten $A, B, C, \ldots LM$ einer Ebene irgend eine $(2n-5)$te Quaternion desselben zu finden, oder die zwischen $2n-5$ Quaternionen desselben Systemes bestehende Relation aufzustellen.

1) In jeder von den $2n-5$ Quaternionen, welche einen beliebig gewählten Punkt des Systems, z. B. M, enthält, bringe man

denselben, wenn er nicht schon der letzte ist, nach §. 113 1a), 1b) in die vierte Stelle, lasse ihn hierauf weg und verwandle somit jede betreffende Quaternion in ein Ternion, d. h. jedes Doppelverhältniss wie $(ABCM)$ in ein einfaches $AC : CB$ und jeden Doppelwinkel $ABCM$ in einen einfachen ACB.

2) Jede Quaternion, in der M nicht vorkommt, zerlege man in zwei Ternionen, z. B. $(ABCD)$ in $(AC:CB):(AD:DB) = (AC:CB)(BD:DA)$ und $ABCD$ in $ACB - ADB = ACB + BDA$.

3) Man suche die Relation, welche bei dem Systeme von $n-1$ Punkten $A, B, C \ldots L$ zwischen den $2n-5$ theils in Ternionen verwandelten, theils durch solche ausgedrückten Quaternionen besteht. Dieselbe Beziehung wird auch zwischen den $2n-5$ gebildeten Quaternionen in dem Systeme der n Punkte $A, B \ldots L, M$ stattfinden*).

Ein Beispiel hierzu für den kleinsten Werth von n $(= 4)$ bietet das dem Ende des vorhergehenden §. beigefügte dar.

Für $n = 5$ wird $2n - 5 = 5$; bei einem Systeme von 5 Punkten A, B, C, D, E wird somit zwischen 5 Quaternionen wenigstens eine Relation bestehen und diese mag im Folgenden zwischen den fünf Doppelwinkeln $ABCD = \alpha$, $BCDE = \beta$, $CDEA = \gamma$, $DEAB = \delta$, $EABC = \varepsilon$ aufgesucht werden.

Setzt man den Punkt E als einen unendlich entfernten und bezeichnet die Richtungen der durch die übrigen vier Punkte A, B, C, D bestimmten Graden, nämlich

$$\begin{array}{cccccc} AB, & BC, & CA, & AD, & BD, & CD \text{ kurz mit} \\ c, & a, & b, & a', & b', & c' \end{array}$$

so lassen sich zunächst obige Doppelwinkel wie folgt ausdrücken:

$$ABCD = ACB + BDA = CA^\wedge CB + DB^\wedge DA = b^\wedge a + b'^\wedge a^\wedge + \pi = \alpha,$$
$$BCDE = BDC = DB^\wedge DC = b'^\wedge c' = \beta,$$
$$CDEA = DCAE = DAC = AD^\wedge AC = a'^\wedge b + \pi = \gamma,$$
$$DEAB = ABDE = ADB = DA^\wedge DB = a'^\wedge b' = \delta,$$
$$EABC = CBAE = CAB = AC^\wedge AB = b^\wedge c + \pi = \varepsilon.$$

Nun besteht zwischen den Winkeln, welche zwei gegenüberliegende Seiten eines vollständigen Vierecks bilden nach §. 114, 2) die Involutionsgleichung

$$\sin a^\wedge c' \,.\, \sin b^\wedge a' \,.\, \sin c^\wedge b' + \sin c'^\wedge b \,.\, \sin a'^\wedge c \,.\, \sin b'^\wedge a = 0.$$

Drückt man die hierin vorkommenden sechs Winkel als Funk-

*) Möbius, Kreisverwandtschaft. §. 41.

tionen (Aggregate) der gegebenen α, β etc. aus, so hat man die unter 3) der obigen Regeln bezeichnete Relation. Es ist aber

$$a^\wedge c' = a^\wedge b + b^\wedge a' + a'^\wedge b' + b'^\wedge c' = \pi - \alpha + \pi - \gamma + \beta = -(\alpha - \beta + \gamma),$$
$$b^\wedge a' = \pi - \gamma,$$
$$c^\wedge b' = c^\wedge b + b^\wedge a' + a'^\wedge b' = \pi - \varepsilon + \pi - \gamma + \delta = -(\gamma - \delta + \varepsilon),$$
$$c'^\wedge b = c'^\wedge b' + b'^\wedge a' + a'^\wedge b = -\beta - \delta + \gamma - \pi = -(\pi + \beta - \gamma + \delta),$$
$$a'^\wedge c = a'^\wedge b + b^\wedge c = \gamma - \pi + \varepsilon - \pi = (\gamma + \varepsilon),$$
$$b'^\wedge a = b'^\wedge a' + a'^\wedge b + b^\wedge a = \alpha - \pi + \gamma - \pi \doteq (\alpha + \gamma).$$

Somit erhält obige Gleichung, als Funktion zon α, β ... ausgedrückt, die Form

$$\sin(\alpha - \beta + \gamma) \sin\gamma \sin(\gamma - \delta + \varepsilon) + \sin(\beta - \gamma + \delta) \sin(\gamma + \varepsilon) \sin(\alpha + \gamma) = 0$$

oder mit Hilfe der goniometrischen Formel

$$4 \sin x \sin y \sin z = \sin(x + y - z) + \sin(y + z - x) + \sin(z + x - y) - \sin(x + y + z)$$

die symmetrische Gestalt:

$$\sin(\alpha + \beta - \gamma + \delta - \varepsilon) + \sin(\beta + \gamma - \delta + \varepsilon - \alpha) + \sin(\gamma + \delta - \varepsilon + \alpha - \beta) + \sin(\delta + \varepsilon - \alpha + \beta - \gamma) + \sin(\varepsilon + \alpha - \beta + \gamma - \delta) = \sin(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon).$$

Die analoge Aufgabe, eine Relation zwischen den fünf Doppelverhältnissen

$$(ABCD),\quad (BCDE),\quad (CDEA),\quad (DEAB),\quad (EABC)\ .$$

zu finden, lässt folgende Lösung zu.

Dadurch, dass der Punkt E wieder als ein unendlich ferner der Ebene angenommen wird, reduciren sich die vier letzten Doppelverhältnisse auf die einfachen

$$BD:DC,\quad DA:AC,\quad AD:DB,\quad CA:AB,$$

in denen, sowie in dem erstgenannten Doppelverhältnisse die sechs Seiten eines vollständigen Vierecks vorkommen. Eine Relation zwischen denselben wird daher auch zu der gesuchten zwischen den bezeichneten einfachen und Doppelverhältnissen führen. Bezeichnet man die Seiten des Vierecks

AB, BC, CA, AD, BD, CD der Reihe nach mit
$\sqrt{h}$, $\sqrt{f}$, $\sqrt{g}$, $\sqrt{f'}$, $\sqrt{g'}$, $\sqrt{h'}$

so besteht zwischen diesen die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 = \; & ff'(g+g'+h+h'-f-f') \\ & + gg'(h+h'+f+f'-g-g') \\ & + hh'(f+f'+g+g'-h-h') \\ & - fgh - fg'h' - f'gh' - f'g'h \text{*)} \end{aligned}$$

welcher man auch nachstehende Form geben kann

$$\begin{aligned} 0 = \; & ff'(g+h-f) + gg'(h+f-g) + hh'(f+g-h) \\ & + f(f'-g')(h'-f') + g(g'-h')(f'-g') \\ & + h(h'-f')(g'-h') - fgh. \end{aligned}$$

Setzt man nun die gegebenen Verhältnisse $(ABCD)$, $(BCDE) = BD:DC$ etc. resp. $= \frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{b}}, \frac{1}{\sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{d}}, \frac{1}{\sqrt{e}}$, so ergiebt sich

$$a = \frac{gg'}{hh'}, \quad b = \frac{f'}{h'}, \quad c = \frac{h}{g'}, \quad d = \frac{h'}{g'}, \quad e = \frac{f}{h}$$

und hieraus

$$h = cg', \quad h' = dg', \quad f = ceg', \quad f' = bdg', \quad g = acdg'.$$

Substituirt man diese Werthe für h, h' etc. in obiger Gleichung, wobei man g' als gemeinschaflichen Faktor $= 1$ setzen kann, und dividirt noch cd heraus, so erhält man schliesslich

$$\begin{aligned} 0 = \; & 1 - a - b - c - d - e + ac + bd + ce + da + eb \\ & + (1-a)\,acd + (1-b)\,bde + (1-c)\,cea + (1-d)\,dab \\ & + (1-e)\,ebc + abcde\,; \end{aligned}$$

eine Formel, deren Bildungsgesetz leicht zu erkennen ist und welche die gesuchte Relation zwischen a, b . . . oder zwischen den reciproken Quadraten der vorgelegten Doppelverhältnisse, d. i. zwischen $(ABDC)^2$, $(BCED)^2$ . . . etc. ausdrückt.

§. 118.

Construction des vierten Punktes eines complexen Doppelverhältnisses, wenn drei Punkte und der Werth desselben gegeben sind. Es seien von dem complexen Doppelverhältniss $[ABCD] = \lambda + i\mu$ die drei Punkte A, B, C der Lage nach, sowie die Werthe von λ und μ gegeben. Setzt man $\lambda + i\mu$

*) Ist der Ausdruck der rechten Seite dieser Gleichung einem endlichen Werthe gleich, so ist dieser das Quadrat des 12fachen Volumens einer Pyramide, deren 6 Kanten $\sqrt{f}$, $\sqrt{g}$ . . sind. Bedeuten nämlich l, m, n die Cosinus der Winkel je zweier der Kanten $\sqrt{f'}$, $\sqrt{g'}$, $\sqrt{h'}$ und V das Volumen der Pyramide, so ist

$$36\,V^2 = f'g'h'(1 - l^2 - m^2 - n^2 + 2lmn);$$

substituirt man darin für l, m, n die Werthe

$$(f'+g'-h) : 2\sqrt{f'g'}, \quad (g'+h'-f) : 2\sqrt{g'h'}, \quad (h'+f'-g) : 2\sqrt{h'f'},$$

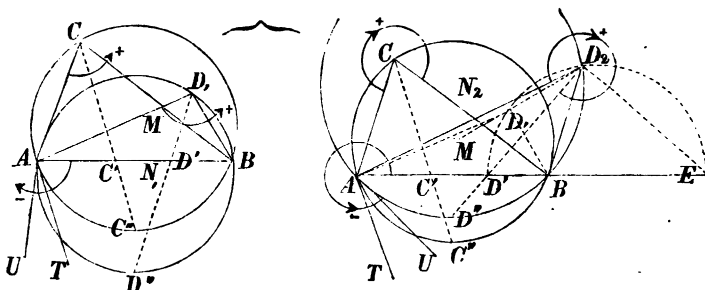
so erhält man obigen Ausdruck für $144\,V^2$, der $= 0$ ist, wenn A, B, C, D in einer Ebene liegen.

$= \varrho\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, so lässt sich nach Festsetzung einer Linieneinheit sowohl ϱ wie φ leicht construiren (103). Dieses vorausgesetzt hat man nun

$$\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DB} = \varrho;\quad ACB - ADB = -\varphi = 2\pi - \varphi.\quad (\text{§. } 111.)$$

Man beschreibe demnach um ABC einen Kreis M, lege an denselben von A aus eine Tangente AT nach derjenigen der beiden möglichen Richtungen, dass, nachdem man den positiven Drehungssinn für alle Winkel der Figur beliebig festgesetzt hat, der Winkel $BAT = -ACB$ ist. (In Fig. 42a. ist der positive Drehungssinn von rechts nach links und somit ACB ein hohler Winkel, in Fig. 42b. entgegengesetzt und ACB ein erhabener Winkel.) An AT lege man

Fig. 42a. u. 42b.



in derselben negativen Richtung den Winkel $TAU = -\varphi$ und beschreibe einen zweiten Kreis (N_1 oder N_2), der AU zur Tangente hat und ebenfalls durch A und B geht. Derjenige Bogen AB dieses Kreises, welcher mit der Tangente AU nicht auf einerlei Seite der Sehne AB liegt, ist dann der Ort des Scheitelpunktes D vom Winkel $ADB = ACB + \varphi$. Halbirt man nun den Winkel ACB durch die CC', so trifft diese Grade die AB in C' so, dass $AC':C'B = AC:CB$ ist, ebenso würde, wenn D schon bestimmt wäre, die Halbirungslinie DD' des Winkels ADB die AB in D' nach dem Verhältniss $AD':D'B = AD:DB$ theilen. Bestimmt man also in der Graden AB zu den Punkten A, B, C' einen vierten Punkt D' so, dass $(ABC'D')$ dem gegebenen (hier stets positiven oder absoluten) Verhältniss ϱ gleich wird, halbirt denjenigen Bogen AB des zweiten Kreises N_1 oder N_2, welcher mit AU auf einerlei Seite der AB liegt

(nicht der Ort von D ist), in dem Punkte D'' und zieht die Grade $D''D'$, so schneidet diese den Kreis N_1 oder N_2 zum zweiten Male in dem gesuchten Punkte D_1 oder D_2.*)

§. 119.

Zusätze und Folgerungen. 1) Als Ort des Punktes D (D_1 oder D_2) lässt sich ausser dem Kreise N_1 (Fig. 42 a.) oder N_2 (Fig. 42 b.) noch der über DE als Durchmesser beschriebene Kreis angeben, wobei E der zu D' zugeordnete vierte harmonische Punkt zu A, B, D' ist (vergl. §. 46).

2) Da somit der Ort von D einerseits ein Kreisbogen ist, der einen bestimmten Winkel ($ACB + \varphi$) fasst, oder durch den Doppelwinkel $ABCD$ bestimmt wird, andererseits ein Kreis ist, welcher die AB in D' und E harmonisch theilt, wobei D' nur von dem Doppelverhältniss ($ABCD$) abhängig ist: so folgt hieraus, dass D auch durch zwei von einander unabhängige Doppelwinkel oder durch zwei von einander unabhängige Doppelverhältnisse allein bestimmt ist. Im letztern Falle sind die beiden Punkte D_1 und D_2 die Durchschnitte der beiden durch die Doppelverhältnisse bestimmten Kreise. Wenn also zwei von den in 3a) oder 3b) des vorhergehenden §. aufgestellten drei Doppelverhältnissen oder drei Doppelwinkeln — wenn von diesen 6 Stücken irgend zwei gegeben sind, so lässt sich immer zu dreien der Punkte A, B, C, D der vierte durch Construction finden (man vergl. §. 114).

§. 120.

Besondere Fälle. Die Punkte und Abschnitte eines complexen Doppelverhältnisses $[ABCD] = \lambda + i\mu = \varrho\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ erhalten durch partikuläre Werthe von ϱ und φ noch besondere Lagen- und Maassverhältnisse, die also auch durch bestimmte Werthe des Doppelverhältnisses besonders charakterisirt sind.

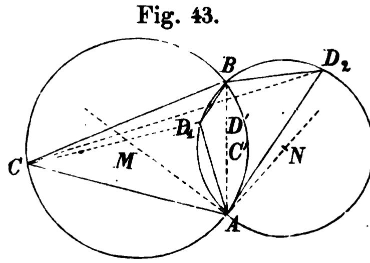
1) Ist $\varphi = \frac{\pi}{2}$, also $[ABCD] = i\varrho = i\mu$, so fallen die beiden Kreise N_1 und N_2 (Fig. 42), welche durch entgegengesetzte Annahme des Drehungssinnes der Winkel erhalten werden, auf einan-

*) Wird in dem Nächstfolgenden vom Punkte D ohne weitere Bezeichnung gesprochen, so sollen damit immer die beiden Punkte D_1, D_2 zugleich gemeint sein.

der, die Punkte D_1 und D_2, welche den gegebenen Bedingungen entsprechen, liegen zu beiden Seiten der AB und werden durch das Doppelverhältniss oder den Modulus $\varrho = \mu$ in derselben Weise, wie vorher bestimmt. (Fig. 43.)

Ein Gleiches findet statt, wenn $\varphi = \frac{3}{2}\pi = -\frac{1}{2}\pi$, oder $[ABCD] = -i\mu$ ist, indem nur D_1 und D_2 ihre Lagen im Kreise N vertauschen.

Fig. 43.



In beiden Fällen wird durch die vier Punkte A, C, B, D in derselben Reihenfolge genommen ein (einfaches) Viereck $ACBD_1$ oder $ACBD_2$ (Fig. 43) bestimmt, dessen gegenüberliegende Winkel ACB und BDA ebenso CBD und DAC sich je nach dem angenommenen Drehungssinne zu einem positiven oder negativen Rechten ergänzen. Denn aus der Voraussetzung $[ABCD] = \pm i\varrho$, folgt $ABDC = CDBA = \pm \frac{\pi}{2}$ oder $ADB + BCA = CBD + DAC = \pm \frac{\pi}{2}$. Dergleichen Vierecke besitzen eine merkwürdige Eigenschaft bezüglich ihrer Seiten und Diagonalen. Nach §. 113 ist $[ABCD] + [ACBD] = 1$, folglich $[ACBD] = 1 \pm i\varrho = \varrho' (\cos\varphi + i \sin\varphi)$, wobei $\varrho' = \sqrt{1+\varrho^2}$ und $tg\,\varphi = \pm \varrho$ ist. Weil also

$$\varrho = (ABCD) \text{ und } \varrho' = \sqrt{1+\varrho^2} = (ACBD),$$

so ist

$$(ACBD)^2 - (ABCD)^2 = \varrho'^2 - \varrho^2 = 1,$$

oder

$$\overline{AB}^2 . \overline{CD}^2 - \overline{AC}^2 . \overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 . \overline{DA}^2,$$

und

$$\overline{AB}^2 . \overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 . \overline{BD}^2 + \overline{DA}^2 . \overline{BC}^2,$$
$$1 = (ACDB)^2 + (ADCB)^2,$$

d. i. Die Summe der Producte aus den Quadraten der gegenüberliegenden Seiten ist gleich dem Producte aus den Quadraten der Diagonalen; ein wohl von Herrn Möbius *) zuerst aufgestellter Satz, der dem pythagorischen für

*) Kreisverwandtschaft. §. 47, 4.

das rechtwinklige Dreieck entspricht und auch in nähere Beziehung damit gebracht werden kann, s. o. §. 116, 3.

Giebt man dem Modulus ϱ oder μ noch den Werth $= 1$, oder ist $[ABCD] = \pm \sqrt{-1}$, so fallen die Punkte C' und D' zusammen und es ist $AC:CB = AD:DB$, oder die Producte der gegenüberliegenden Seiten des einfachen Vierecks $ACBD_1$ oder $ACBD_2$ sind einander gleich, mithin das Product aus den Quadraten der Diagonalen doppelt so gross, als das Product aus den Quadraten zweier gegenüberliegender Seiten.

2) Ist $\varphi = 0$, mithin $[ABCD] = \varrho = \lambda$, so fallen die beiden Kreise N_1 und N_2 mit M zusammen, die vier Punkte liegen in der Peripherie eines Kreises (M) und zwar D mit C auf derselben Seite von AB. (§. 21.)

Wenn dagegen $\varphi = \pi$, oder $[ABCD] = -\lambda$ ist, so findet dasselbe wie im vorigen Falle statt, nur liegt D mit C auf entgegengesetzten Seiten von AB.

In beiden Fällen hat man bezüglich der Seiten und Diagonalen des einfachen Vierecks $ACBD$ die Relation, welche der ptolemäische Satz ausdrückt, und die dem Seitenverhältnisse eines Dreiecks entspricht, in welchem zwei Winkel $= 0$, der dritte $= \pi$ ist. (S. §. 108, 2).

Wollte man zugleich $\varphi = 0$, und ϱ oder $\lambda = 1$ voraussetzen, so müsste der Punkt D' mit C' also auch D mit C zusammenfallen; es kann mithin der Werth eines complexen Doppelverhältnisses ebenso wenig wie der eines reellen (s. §. 26) der positiven Einheit gleich kommen.

Dagegen können die Bedingungen $\varphi = \pi$ und $\varrho = 1$, welche aus der Voraussetzung $[ABCD] = -1$ hervorgehen, wohl neben einander bestehen; die Punkte A, B, C, D liegen dann in einer Kreisperipherie und zwar C und D auf verschiedenen Seiten der Graden AB nach §. 21, weil $ACB - ADB = \pm \pi$ ist. Bezüglich der Seiten des einfachen Vierecks $ACBD$ hat man $AC.DB = CB.DA$ oder das absolute Doppelverhältniss $(ABCD) = 1$. Sowie nun das reelle Doppelverhältniss $(ABCD) = -1$ zwischen vier Punkten einer Graden ein harmonisches genannt wird, ebenso soll auch das complexe Doppelverhältniss $[ABCD] = -1$ ein harmonisches heissen, und die vier Punkte A, B, C, D einer Ebene sollen als in harmonischer Lage befindlich bezeichnet werden. Das Nähere hierüber im folgenden §.

3) Liegt der Punkt C mit A und B in einer Graden, oder ist $ACB = \pi$, oder $= 0$ je nachdem C ein innerer oder äusserer Punkt der Graden AB ist, so hat man, wenn allgemein $[ABCD] = \varrho\ (\cos\varphi + i \sin\varphi)$ ist, für die Lage des Punktes D die Bedingungen $ADB = \pi + \varphi$ und absolut $\varrho = (ABCD') = (ABCD)$ im ersten Falle, oder $ADB = \varphi$ und absolut $\varrho = (ABC'D') \doteq (ABCD)$ im zweiten, wobei C' der vierte harmonische Punkt zu A, B, C auf der Graden AB ist.

Wird dabei auch $\varphi = \pi$ gesetzt, so hat man $[ABCD] = (ABCD) = -\varrho$, und im ersten Falle $ADB = 2\pi = 0$, also D als einen äusseren Punkt der Graden AB, im andern Falle $ADB = \pi$, mithin D als einen innern Punkt der Graden, was mit dem negativen Werthe des somit reellen Doppelverhältnisses übereinstimmt.

Umgekehrt gestaltet sich die Lage von D in beiden Fällen, wenn $\varphi = 0$, also $[ABCD] = (ABCD) = \varrho$ vorausgesetzt wird.

Endlich geht das Doppelverhältniss in das reelle harmonische zwischen vier Punkten einer Graden über, wenn noch dazu $\varrho = 1$ angenommen wird, wobei jedoch mit $ACB = \pi$ nur $\varphi = 0$, und mit $ACB = 0$ nur $\varphi = \pi$ gleichzeitig vorausgesetzt werden kann. (§. 44.)

§. 121.

Harmonische Lage von vier Punkten einer Ebene. Wie bereits erwähnt, kann auch das complexe Doppelverhältniss $[ABCD]$ der negativen Einheit gleich sein; es haben dann die vier Punkte desselben in der Ebene eine solche Lage zu einander, dass auf dieselbe alle metrischen Verhältnisse, die bei einer harmonischen Proportion zwischen Punkten einer Graden vorkommen, in absolutem Sinne Anwendung finden und dass ausserdem diesen Verhältnissen gewisse Beziehungen zwischen Winkeln zur Seite stehen, welche gewissermassen als die logarithmischen Gleichungen derselben angesehen, übrigens nach dem eingeführten Algorithmus sehr leicht aus jenen, — sowie umgekehrt jene aus diesen — abgeleitet werden können. Es sollen daher nach Möbius *) kurz die vier Punkte A, B, C, D harmonische Punkte einer Ebene und A und B, C und D wieder zugeordnete Punktepaare heissen.

1) Das Doppelverhältniss $[ABCD] = -1$ kann hinsichtlich seines Werthes nur befriedigt werden, wenn in dem allgemeinen Ausdrucke $\varrho\ (\cos\varphi + i \sin\varphi)$ für den Werth eines Doppelverhältnisses

---

*) Berichte der K. S. Gesellsch. d. Wissensch. 1852. S. 50.

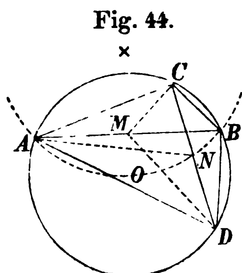
1 a) $\quad \varrho = (ABCD) = 1$ oder $AC:CB = AD:DB$

und

1 b) $\quad \varphi = ABCD = \pm \pi$ oder $ACB - ADB = \pm \pi$

ist. Die zweite Gleichung besagt nach §. 113, dass die Punkte A, B, C, D (Fig. 44) in der Peripherie eines Kreises und zwar C und D auf entgegengesetzten Seiten der Graden AB, also sämmtliche vier in der Folge A, C, B, D liegen; die erste Gleichung dagegen, dass die Producte je zweier gegenüberliegender Seiten des Sehnenvierecks $ACBD$ einander gleich sind.

Fig. 44.



2) Hieraus und aus dem ptolemäischen Satze §. 108, 2) folgt, dass das Product der beiden innerhalb des Kreises zum gegenseitigen Durchschnitt kommenden Seiten AB und CD des vollständigen Vierecks doppelt so gross ist, als das Product je zweier anderer gegenüberliegender Seiten, d. i. $AB.CD = 2\,AC.BD = 2\,CB.DA$.

Dasselbe sowie eine dem entsprechende Winkelgleichung geht auch auf folgende Weise hervor. Weil $[ABCD] = -1$, so ist nach §. 113 III. $[ACBD] = 2$, mithin

2 a) $\quad (ACBD) = 2$ oder $AB.CD = 2\,AC.BD = 2\,CB.DA$,

2 b) $\quad ACBD = 0$ oder $ABC = ADC$ u. $BAD = BCD$.

Ebenso ergiebt sich $(ADBC) = 2$ und $ABD = ACD$ u. s. w. Auch diese Winkelgleichungen geben die Kreislage der vier harmonischen Punkte zu erkennen (§. 21, 2).

3) Führt man in ähnlicher Weise wie in §. 51 und 52 bezüglich der Gleichungen X. und XII. den Mittelpunkt M des Abschnittes $[AB]$ ein, für welchen man nach §. 104 u. 105 gleichfalls $[MA] + [MB] = 0$ hat, so erhält man die Gleichungen

$$[MC].[MD] = [MA]^2 = [MB]^2,$$
$$[CA].[CB] = [CD]\,[CM].$$

die ebenso die harmonische Lage von vier Punkten in der Ebene charakterisiren. Giebt man der ersteren die Form

$$\frac{[AM]}{[MC]} \cdot \frac{[AM]}{[MD]} = \frac{[BM]}{[MC]} \cdot \frac{[BM]}{[MD]} = 1,$$

so folgt aus derselben (s. Fig. 44)

3 a) $\quad CM:MA = AM:MD$ und $CM:MB = BM:MD$

3 b) $\quad CMA = AMD$ und $CMB = BMD$.

Beide Gleichungen in Verbindung geben zu erkennen, dass die Dreiecke *CMA* und *AMD*, sowie *CMB* und *BMD* nicht blos ähnlich, sondern auch, weil die nach einerlei Sinn gerechneten Winkel in 3b) von homologen Schenkeln gebildet werden, einstimmig sind, oder ähnliche Lage haben. (§. 22.)

4) Ebenso folgt aus der andern Gleichung, der man die Formen

$$\frac{[AC]}{[CD]} \cdot \frac{[BC]}{[CM]} = \frac{[AC]}{[CM]} \cdot \frac{[BC]}{[CD]} = 1$$

geben kann, dass

4a) $DC:CA = BC:CM$ und $DC:CB = AC:CM$,

4b) $DCA = BCM$ und $DCB = ACM$;

somit auch die Dreiecke

DCA und *BCM* sowie *DCB* und *ACM*

einander einstimmig ähnlich sind.

Sind also die Punkte *A* und *B*, *C* und *D* in einer Ebene einander harmonisch zugeordnet und ist *M* die Mitte des Abschnittes *AB* eines Punktepaares, so sind immer die Dreieke *CMA*, *AMD*, *CBD*, desgleichen *CMB*, *BMD*, *CAD* einander einstimmig ähnlich.

In gleicher Weise ergiebt sich, dass wenn *N* der Mittelpunkt von *CD* ist, die Dreiecke

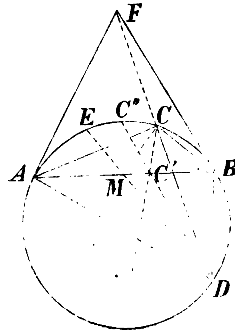
ANC, *CNB*, *ADB*, und ebenso
AND, *DNB*, *ACB*

einander einstimmig ähnlich sind.

§. 122.

Construction des vierten harmonischen Punktes zu drei gegebenen der Ebene. Sind *A*, *B*, *C* (Fig. 45) die gegebenen Punkte der Ebene, *D* der gesuchte vierte und dem *C* zugeordnete, so beschreibe man der in §. 118 angegebenen Construction entsprechend um *ACB* einen Kreis und halbire den Winkel *ACB* sowie den Bogen *ACB*. Trifft die Halbirungslinie des Winkels *ACB* die *AB* in C' und legt man durch diesen und den Halbirungspunkt C'' des Bogens *ACB* die Grade $C''C'$, so trifft diese den

Fig. 45.



Kreis zum zweiten Male in dem gesuchten Punkte D. Der Beweis folgt unmittelbar aus §. 121, 1.

Die Aehnlichkeit und Einstimmigkeit der Dreiecke CMA, AMD lässt auch folgende einfache Construction von D zu. Nachdem man um ABC den Kreis beschrieben hat, trage man von B aus den Bogen BE gleich und in gleichem Sinne mit CA ab, und ziehe durch E und den Mittelpunkt M der AB eine Grade ED, welche den Kreis in dem gesuchten Punkte trifft.

Man kann den Punkt D ferner dadurch bestimmen, dass man an den um ABC beschriebenen Kreis in A und B zwei Tangenten legt, welche sich in F schneiden mögen, und durch F und C eine Grade legt, welche den Kreis zum zweiten Male in D trifft. Man hat nämlich wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke CFA und AFD sowie der Dreiecke CFB und BFD

$$CA:AD = CF:AF \text{ und } CB:BD = CF:BF,$$

folglich, wegen $AF = BF$,

$$CA:AD = CB:BD, \text{ oder } (ABCD) = 1.$$

Werden also von einem Punkte F der Ebene an einen Kreis zwei Tangenten FA und FB und eine Secante FCD gelegt, so bilden die vier Punkte A und B, C und D zwei Paare zugeordneter harmonischer Punkte. (Der Satz behält seine Giltigkeit, auch wenn die Durchschnittspunkte C und D der Secante imaginär werden, s. u. §. 124.)

§. 123.

Construction zweier zugeordneter harmonischer Punkte, wenn in der Ebene die beiden andern und die Mitte des von den ersteren gebildeten Abschnittes gegebenen sind. Seien (Fig. 44) A und B das gegebene Punktepaar und N die Mitte des Abschnitts der gesuchten C und D, so ist die Aufgabe als gelöst anzusehen, wenn man den Mittelpunkt O des um das harmonische Viereck $ACBD$ zu legenden Kreises gefunden hat; denn die Punkte C, D liegen alsdann noch auf einer zur ON senkrechten Graden. Nun muss der doppelte Peripheriewinkel ACB gleich dem Centriwinkel AOB sein, wie auch O gegen AB liege, wenn nur beide

Fig. 44.

Winkel in einerlei Sinne genommen werden. Da auch (§. 121, 4) $ACB = AND = DNB$, folglich $2ACB = AND + DNB = ANB$, also auch $AOB = ANB$ sein muss, so liegt O in der Peripherie des um ANB zu legenden Kreises, und ist somit, sowie durch eine die AB halbirende Senkrechte MO seiner Lage nach bestimmt.

Zusatz. Ist N ein innerer Punkt des Abschnittes AB, also $ANB = \pm \pi$ und $ACB = \pm \frac{\pi}{2}$, so ist AB der Durchmesser des fraglichen Kreises O, und CD die durch N gelegte zu AB senkrechte Sehne desselben. Dieser besondere Fall ist bereits in der zur Aufgabe §. 57 beigefügten Bemerkung erwähnt.*) Ist dagegen N ein äusserer Punkt der AB, mithin $ANB = 0$ oder $\pm 2\pi$, so ist $ACB = 0$ oder $\pm \pi$, und man hat dann den Fall, welcher in der Aufgabe §. 57 behandelt ist. Man kann dabei C und D als die imaginären Durchschnittspunkte einer durch N und auf AB senkrecht gezogenen Graden mit dem über AB als Durchmesser beschriebenen Kreise ansehen. (s. d. folgend. §.)

§. 124.

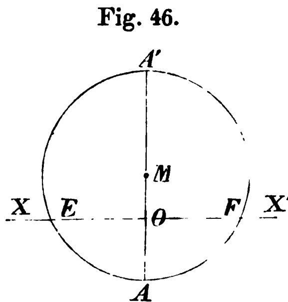
Bestimmung der imaginären Durchschnittspunkte eines Kreises mit einer ausserhalb desselben und in seiner Ebene liegenden Graden. 1) Es kommt bei Auflösung mancher Aufgaben nicht selten vor, dass die Bestimmung gewisser Constructionselemente von den Durchschnittspunkten eines Kreises und einer Graden abhängig gemacht wird (m. s. z. B. §. 83 u. 84). Haben nun Kreis und Grade unter gewissen Bedingungen eine solche Lage, dass ein Durchschnitt beider unmöglich wird, so wird damit auch die davon weiter abhängige Lösung der Aufgabe als unmöglich, oder die Aufgabe selbst und der von derselben repräsentirte Satz als nur unter gewissen Bedingungen als annehmbar hingestellt. Dennoch ist in vielen Fällen das Verschwinden der genannten Durchschnittspunkte kein unbedingtes Merkmal für die Unmöglichkeit der Lösung, insbesondere wenn die Aufgabe

*) Es ist somit eine willkürliche und beschränkende Annahme, wenn Hr. Chasles in seiner *Geom. super.* den Mittelpunkt eines imaginären Segments stets reell annimmt. Richtig ist allerdings die Voraussetzung in sofern, als bei ihm in der Regel nur rein imaginäre (nicht complexe) Abschnitte vorkommen.

sich auf anderem Wege ohne Zuhilfenahme eines Kreises und einer Graden construiren lässt, oder wenn unter die Bedingungen der Aufgabe anfänglich derartige mit aufgenommen worden sind, welche in Folge weiterer Untersuchungen als willkührliche und unnöthige sich herausstellen. Es fragt sich nun, ob nicht in den Fällen, wo es sich um die Durchschnittspunkte einer Graden und eines Kreises handelt, die aber wegen der besondern Lage beider Elemente nicht zum Vorschein kommen, zwei andere Punkte der Ebene die Stelle der geforderten Durchschnittspunkte vertreten können und somit als Unterlagen für weitere Constructionen sich verwenden lassen ganz in derselben Weise, wie die wirklichen Durchschnittspunkte eines Kreises und einer eigentlichen Sehne oder Secante. Man würde dann diese, die Durchschnittspunkte eines Kreises und einer Graden vertretenden Punkte die imaginären Durchschnittspunkte nennen können: eine Bezeichnung, die im Folgenden noch weiter ihre Erklärung finden wird.

2) Sind ein Kreis M und eine Grade XX' ihrer Lage nach gegeben (Fig. 46 u. 47), so muss man auch den Radius des Kreises sowie den Fusspunkt O eines vom Kreismittelpunkte M auf die Grade gefällten Perpendikels und die Länge MO desselben als gegeben voraussetzen. Betrachtet man der Einfachheit halber in der Ebene die XX' selbst als Richtungslinie, also jeden Abschnitt derselben als einen reellen und setzt zuerst voraus (Fig. 46), dass der Mittelpunkt M in einer gegen den Radius m des Kreises kleinern Entfernung von derselben absteht, so giebt es zwei wirkliche Durchschnittspunkte E und F der Graden mit dem Kreise, welche in derselben vom Fusspunkte O zu beiden Seiten desselben um

Fig. 46.



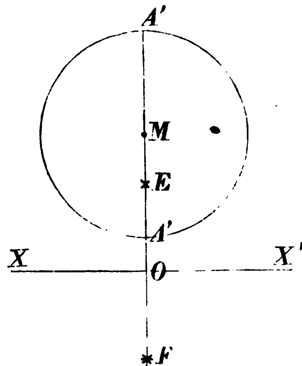
a) $$\pm \sqrt{m^2 - MO^2}$$

abstehen. Rückt bei gleichbleibender Lage von XX' und derselben Länge von m der Mittelpunkt M immer weiter ab, so nähern sich die Durchschnittspunkte E und F dem Fusspunkte O und fallen mit demselben zusammen, wenn $\sqrt{m^2 - OM^2} = 0$, oder XX' zur Tangente des Kreises geworden ist. Bei noch weiterer Entfernung

des Kreismittelpunktes M von der Graden XX' hört jede Gemeinschaft derselben mit dem Kreise auf (Fig. 47) und der Ausdruck für die Entfernung der Durchschnittspunkte E und F vom Fusspunkte O wird imaginär, oder es ist $[OE] = [OF] =$

b) $\pm \sqrt{MO^2 - m^2} \,.\, \sqrt{-1}$

Fig. 47.



Construirt man nun nach den Principien des §. 103 die Punkte E und F, so liegen dieselben auf der Senkrechten OM zu beiden Seiten der XX' und in der Entfernung $= \sqrt{MO^2 - m^2}$ von O. Die in solcher Weise für diesen Fall bestimmten Punkte E und F müssen nun gleiche metrische Eigenschaften mit den reellen Durchschnittspunkten eines Kreises und einer denselben wirklich durchschneidenden Graden haben, wenn und insofern bei jeder Beziehung derselben auf reelle Punkte und Abschnitte ihre Entfernung von ihrer Mitte O durch die Gleichung b) oder eine derselben äquivalente vermittelt wird. Es ist dieses eine unmittelbare und nothwendige Folgerung aus dem oben §. 101 und 102 aufgestellten Princip bezüglich complexer und imaginärer Abschnitte, sowie deren Deutung und Construction.

3) Es haben z. B. die reellen Durchschnittspunkte eines Kreises und einer Graden die Eigenschaft, dass, wenn zu der Graden ein Durchmesser AA (Fig. 46) senkrecht gelegt wird, derselbe von jener in einem Punkte O so geschnitten wird, dass das Product seiner Abschnitte $AO \,.\, OA'$ dem Quadrate ($OE^2 = OF^2$) des halben Abstandes beider Punkte gleich ist. Dieselbe Eigenschaft besitzen die imaginären Durchschnittspunkte eines Kreises und einer denselben nicht treffenden Graden. Denn (Fig. 47) es ist gemäss der Gleichung b)

$$OE^2 = OF^2 = MA^2 - MO^2,$$
$$= (MA + MO)(MA - MO),$$

oder, weil $MA = -MA'$ ist,

$$OE^2 = OF^2 = (MO - MA')(MA - MO) = A'O \,.\, OA = AO \,.\, OA'.$$

4) Ein anderer bekannter Satz der Elementargeometrie besagt,

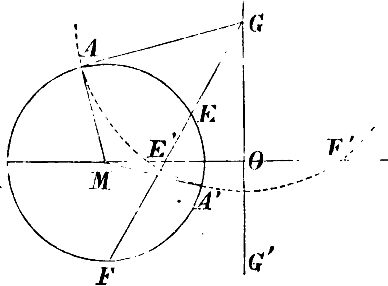
dass, wenn durch einen Punkt G der Ebene eines Kreises M zwei oder mehrere Secanten gelegt werden, die denselben in den Punkten E und F, E' und F'... schneiden, die Producte $GE.GF$, $GE'.GF'$.. der Abstände des Punktes G von den Durchschnittspunkten auf jeder Graden constant und gleich dem Quadrat einer von G an den Kreis gelegten Tangente GA, GA' gleich sind. Derselbe Satz gilt nun auch, wenn eine oder mehrere der durch G gelegten Graden den Kreis gar nicht treffen, bezüglich der zu jeder solchen Graden gehörigen imaginären Durchschnittspunkte und ihrer Abstände von G.

Nennt man nämlich m den Halbmesser des Kreises M (Fig. 48), und sind E' und F' die imaginären Durchschnittspunkte der GG' und des Kreises, so ist absolut genommen

$$GE'.GF' = GE'^2 = GO^2 + OE'^2$$
$$= GO^2 + OM^2 - m^2$$
$$= GM^2 - m^2 = (GM + m)(GM - m),$$

mithin $$GE'.GF' = GE.GF.$$

Fig. 48.



Da ferner $GE.GF = GA^2$, so hat man auch $GE' = GF' = GA$, woraus folgt, dass, wenn die Grade GG' sich um den Punkt G dreht, die imaginären Durchschnittspunkte derselben und des Kreises M in der Peripherie eines zweiten Kreises G sich fortbewegen, dessen Radius der von G an den Kreis M gelegten Tangente gleich ist.

Da die Radien MA, MA' wieder Tangenten des Kreises G sind, so folgt nach dem zu Ende des §. 122 ausgesprochenen Satze, dass die Punkte A und A', E' und F', insofern sie dem Kreise G angehören, zugeordnete harmonische Paare bilden. Weil aber A und A' auch die Berührungspunkte der von G aus an den Kreis M gelegten Tangenten sind, so lässt sich derselbe Satz auch auf den Kreis M beziehen, wobei E' und F' als dessen imaginäre Durchschnittspunkte mit der Graden GG' anzusehen sind. Also:

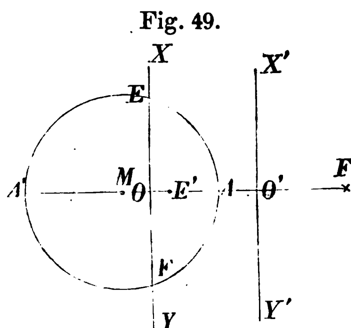
W e r d e n v o n e i n e m P u n k t e G d e r E b e n e e i n e s K r e i s e s M a n d e n s e l b e n d i e b e i d e n T a n g e n t e n GA, GA' u n d

ausserdem von demselben Punkte G aus eine beliebige Grade GEF oder GG' gezogen, so bilden die Berührungspunkte A und A' und die reellen E und F oder imaginären E' und F' Durchschnittspunkte der Graden und des Kreises zwei Paare zugeordneter harmonischer Punkte. (vergl. §. 122.)

6) Weitere Folgerungen werden später Erwähnung finden; schliesslich sei nur noch eines merkwürdigen Ausdruckes gedacht, in welchem mehrere der vorstehenden Erörterungen zusammenfliessen.

Zieht man in die Ebene eines Kreises einen Durchmesser und eine beliebige Senkrechte zu demselben, so sind die Durchschnittspunkte beider Graden und des Kreises im Allgemeinen vier harmonische Punkte und zwar vier harmonische Punkte der Ebene, wenn die Durchschnittspunkte der Senkrechten reell sind; dagegen vier harmonische Punkte einer Graden (des Durchmessers), wenn jene Durchschnittspunkte imaginär sind. Oder (Fig. 49) sind die Durchschnittspunkte E, F reell, so ist $[AA'EF] = -1$; sind dagegen die Durchschnittspunkte E', F' imaginär, so ist $(AA'E'F') = -1$.

Fig. 49.

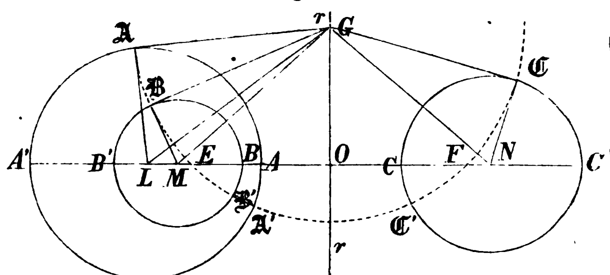


§. 125.

Imaginäre Durchschnittspunkte, gemeinschaftliche Sehne oder Chordale zweier und mehrerer Kreise. Die Durchschnittspunkte irgend zweier Kreise kann man auch als die Durchschnittspunkte eines derselben mit der beiden Kreisen gemeinschaftlichen Sehne betrachten. Hiernach sowie nach den Erörterungen des vorigen §. lassen sich in dem Falle, dass von beiden Kreisen der eine ganz innerhalb oder ganz ausserhalb des andern liegt, die imaginären Durchschnittspunkte beider als die Durchschnittspunkte eines jeden Kreises mit einer Graden ansehen, welche als gemeinschaftliche (imaginäre) Secante für beide Kreise betrach-

tet werden kann, also dieselben nach vorigem §. zu bestimmenden, zwei imaginären Durchschnittspunkte mit dem einen Kreise wie mit dem andern Kreise hat. Es handelt sich somit darum, diese die Rolle einer gemeinschaftlichen Sehne übernehmenden Graden ihrer Lage nach zu bestimmen, womit die gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte derselben mit den beiden Kreisen gleichfalls gegeben sind. Bezeichnet man mit r (Fig. 50) diese Grade, mit E und F die imaginären Durchschnittspunkte derselben mit dem einen

Fig. 50.



Kreise, dessen Mittelpunkt L ist, so sind diese harmonisch zugeordnet den Endpunkten A, A' eines auf r senkrechten Durchmessers des Kreises L. Dasselbe gilt aber auch bezüglich des zweiten Kreises, dessen Mittelpunkt M und die Durchschnittspunkte eines auf r senkrecht stehenden Durchmessess B, B' seien. Man hat somit

$$(AA'EF) = (BB'EF) = -1.$$

Hieraus folgt:

1) die Grade r ist eine Senkrechte zur Centrale LM beider Kreise;

2) die imaginären Durchschnittspunkte E, F der beiden Kreise L, M oder die gemeinschaftlichen Schneidepunkte der Graden r mit den beiden Kreisen L, M sind die Doppelpunkte einer Involution, welche durch die Punktepaare A und A', B und B' bestimmt ist.

3) Der Durchschnittspunkt O der Graden r mit der Centrale MN ist der Centralpunkt dieser Involution. (§. 81.)

Die Grade r, insofern sie dieselben zwei imaginären Durchschnittspunkte mit beiden Kreisen L, M hat, könnte man die ge-

meinschaftliche imaginäre Sehne dieser Kreise nennen; sie vertritt für den betrachteten Fall, dass von den Kreisen der eine ganz innerhalb oder ganz ausserhalb des andern liegt, vollständig die gemeinschaftliche Sehne zweier sich wirklich schneidender Kreise. Für gewöhnlich wird sie die Chordale, auch Linie aequidifferenter Potenzen, Potenzlinie, Radicalaxe (*axe radical*) genannt. Die Bezeichnung Chordale dürfte auch nach der eben gegebenen Entwickelung am geeignetsten erscheinen. (M. s. §. 76, 4. Anmerkung.)

Nach dem Zusammenhange, in welchem die Chordale mit der Involution und den Doppelpunkten derselben dargestellt worden ist, ergeben sich leicht noch nachstehende Folgerungen:

4) Drei und mehrere Kreise L, M, N (Fig. 50) haben dieselben zwei imaginären Durchschnittspunkte E und F (eine und dieselbe Chordale r) wenn

a) sie eine und dieselbe Grade LMN als Centrale haben;

b) die Durchschnittspunkte A und A_1, B und B_1, C und C_1 der Kreise mit dieser Centrale in Involution sind.

Der Centralpunkt O der Involution ist dann der Punkt, in welchem die Chordale die Centrale senkrecht schneidet und die Doppelpunkte der Involution sind die gemeinschaftlichen imaginären Durchschnittspunkte der Kreise.

5) Das Vorhandensein der Doppelpunkte der Involution in der Centrale bedingt nach §. 83, dass keiner der involutorischen Abschnitte in irgend einen andern eingreift, oder dass jeder derselben entweder ganz innerhalb oder ausserhalb eines beliebigen andern Abschnitts liegt; d. h. die Kreise müssen, wenn sie eine gemeinschaftliche Chordale haben sollen, ganz innerhalb oder ganz ausserhalb einander liegen. Daher können mehrere Kreise, von denen einige sich schneiden, und einige sich nicht schneiden, keine allen gemeinschaftliche Chordale haben.

6) Schneiden sich drei und mehrere Kreise L, M, N . . . in denselben zwei reellen Punkten E und F (die Figur kann leicht entworfen werden), so sind (§. 76, 3) die Durchschnittspunkte A und A', B und B', C und C' derselben mit ihrer gemeinschaftlichen Centrale in Involution; nach dem zu Ende des vor. §. ausgesprochenen Satze sind aber

$$[AA'EF] = [BB'EF] = [CC'EF] = -1$$

oder E und F sind als die imaginären Doppelpunkte der Involution, bei welcher die involutorischen Abschnitte in einander eingreifen, anzusehen. (Dasselbe wird sich unten aus noch anderen Betrachtungen ergeben; m. vergl. damit §. 100, 5. Die gemeinschaftliche reelle Sehne EF geht durch den Centralpunkt O der Involution und wird von der Centrale senkrecht halbirt.

7) Ist r die Chordale (Fig. 50) zweier oder mehrerer Kreise, sind E, F deren imaginäre Durchschnittspunkte und beschreibt man von einem beliebigen Punkte G der Chordale mit dem Halbmesser $GE = GF$ einen Kreis, welcher die Kreise $L, M, N \ldots$ in den Punk- $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ schneidet, zieht endlich die Radien $G\mathfrak{A}$, $G\mathfrak{B}$, $G\mathfrak{A}' \ldots$ ebenso $L\mathfrak{A}$, $M\mathfrak{B}$, $L\mathfrak{A}' \ldots$; so hat man

$$G\mathfrak{A}^2 = GE^2 = GO^2 + OE^2,$$
$$= GO^2 + OL^2 - L\mathfrak{A}^2,$$
$$= GL^2 - L\mathfrak{A}^2, \text{ mithin}$$
$$G\mathfrak{A}^2 + L\mathfrak{A}^2 = GL^2,$$

d. h. das Dreieck $GL\mathfrak{A}$ ist bei $\mathfrak{A}$ rechtwinklig, folglich $G\mathfrak{A}$ eine Tangente des Kreises L. Ebenso lässt sich darthun, dass $G\mathfrak{B}$, $G\mathfrak{B}'$ und $G\mathfrak{C}$, $G\mathfrak{C}'$ Tangenten der Kreise M und N sind; also

Zieht man von einem beliebigen Punkte G der Chordale zweier oder mehrerer Kreise Tangenten an dieselben, so sind diese einander gleich.

8) Hieraus folgt weiter nach 4) des vor. §.: Werden von einem beliebigen Punkte G der Chordale zweier oder mehrerer Kreise ein oder mehrere Secanten nach denselben gezogen, welche jeden derselben in zwei reellen oder imaginären Durchschnittspunkten L_1 und L_2, M_1 und M_2, N_1 und $N_2 \ldots$ schneiden, so sind die Producte $GL_1 . GL_2$, $GM_1 . GM_2$, $GN_1 . GN_2 \ldots$ der Abstände des Punktes G von den reellen oder imaginären Durchschnittspunkten einer Secante und eines Kreises constant und gleich dem Quadrate ($G\mathfrak{A}^2$) einer von G an irgend einen der Kreise gelegten Tangente.

Der Satz lässt sich auch wie folgt umkehren. Ist für irgend einen ausserhalb der Kreise L und M liegenden Punkt G der Ebene

$$GL_1 . GL_2 = GM_1 . GM_2,$$

wobei L_1 und L_2, die Durchschnittspunkte einer von G aus gezo-

genen Graden mit dem Kreise L sind und dieselbe Bedeutung auch M_1 und M_2 bezüglich des zweiten Kreises und derselben oder einer andern durch G gehenden Graden haben; so ist G ein Punkt der Chordale. Denn aus der Voraussetzung folgt

$$G\mathfrak{A}^2 = G\mathfrak{B}^2,$$

wenn $G\mathfrak{A}$ und $G\mathfrak{B}$ zwei von G aus nach den Kreisen L und M gezogene Tangenten sind. Fällt man nun von G auf die Centrale beider Kreise die Senkrechte GO, so hat man

$$GL^2 - L\mathfrak{A}^2 = GM^2 - M\mathfrak{B}^2,$$

oder

$$GO^2 + OL^2 - L\mathfrak{A}^2 = GO^2 + OM^2 - M\mathfrak{B}^2,$$

mithin auch wegen $L\mathfrak{A} = LA$, $M\mathfrak{B} = MB$ und $LA = -LA'$, $MB = -MB'$,

$$OL^2 - LA^2 = OM^2 - MB^2,$$

$$(OL + LA)(OL - LA) = (OM + MB)(OM - MB)$$

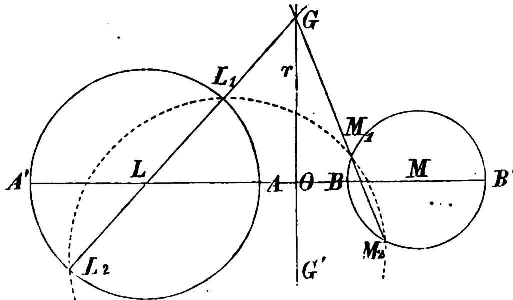
oder

$$OA . OA' = OB . OB',$$

d. h. O ist der Centralpunkt einer durch die Punkte A und A', B und B' bestimmten Involution, mithin ist die durch denselben zur Centrale senkrechte Grade OG die Chordale der Kreise L und M (vergl. oben 1. u. 3.) und G ein Punkt der Chordale.

9) Man hat demnach folgende einfache Construction der Chordale zweier Kreise. Seien L und M (Fig. 51) deren Mittelpunkte und Q der eines beliebigen Kreises, welcher die beiden ersten in

Fig. 51.



den Punkten L_1 und L_2, M_1 und M_2 schneidet. Zieht man dann die Sehnen L_1L_2, M_1M_2, welche sich in G schneiden und fällt von G auf die Centrale LM die Senkrechte GO, so ist diese die Chordale der Kreise L und M.

Denn man hat, weil $L_1 L_2$ ebenso wie $M_1 M_2$ Punkte des Kreises Q sind,

$$GL_1 . GL_2 = GM_1 . GM_2,$$

mithin ist G ein Punkt der Chordale der Kreise L und M.

Da $L_1 L_2$ als gemeinschaftliche Sehne der Kreise L und Q auch als Chordale derselben angesehen werden kann, ebenso $M_1 M_2$ bezüglich der Kreise M und Q, so sieht man, dass die drei Chordalen von je zweien der drei Kreise L, M, Q sich in Einem Punkte G schneiden. Allgemeiner:

10) Hat man in einer Ebene drei beliebige Kreise M_1, M_2, M_3, welche sich zu je zweien schneiden mögen oder nicht, sind r_1, r_2, r_3 die gemeinschaftlichen Sehnen oder Chordalen resp. der Kreise M_2 und M_3, M_3 und M_1, M_1 und M_2, so haben r_1, r_2, r_3 einen gemeinsamen Durchschnittspunkt P, welcher der **Potenzpunkt der drei Kreise** genannt wird.

Denn ist vorläufig P der Durchschnittspunkt von r_1 und r_2 und zieht nun von demselben drei Grade, welche die Kreise M_1, M_2, M_3 bezüglich in den Punkten A_1 und A_2, B_1 und B_2, C_1 und C_2 schneiden, so ist, weil P der r_1 angehört,

$$PB_1 . PB_2 = PC_1 . PC_2$$

und weil auch P ein Punkt von r_2 ist,

$$PC_1 . PC_2 = PA_1 . PA_2,$$

folglich

$$PA_1 . PA_2 = PB_1 . PB_2$$

d. h. P ist auch ein Punkt von r_3. (S. ob. 8.)

11) Ferner ist (Fig. 50)

$$GL^2 = L\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{A}G^2,$$
$$GM^2 = M\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{B}G^2,$$
$$GN^2 = N\mathfrak{C}^2 + \mathfrak{C}G^2;$$

hieraus folgt mit Berücksichtigung von $\mathfrak{A}G = \mathfrak{B}G = \mathfrak{C}G$ (7)

$$GL^2 - GM^2 = L\mathfrak{A}^2 - M\mathfrak{B}^2; \quad GM^2 - GN^2 = M\mathfrak{B}^2 = N\mathfrak{C}^2,$$

d. h. Die Quadrate der Abstände eines beliebigen Punktes der Chordale von den Mittelpunkten der Kreise geben dieselben Unterschiede, wie die Quadrate der Radien der betreffenden Kreise, oder diese Quadratdifferenzen sind für jeden Punkt der Chordale constant.

12) Da endlich nach 5) des vorherg. §.

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{A}'EF] = [\mathfrak{B}\mathfrak{B}'EF] = [\mathfrak{C}\mathfrak{C}'EF] = -1$$

ist, so kann man die nicht mehr in Einer Graden, sondern in einer Ebene liegenden Punktepaare $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ in demselben erweiterten Sinne als involutorische ansehen, wie es bezüglich vier harmonischer Punkte einer Ebene geschehen ist. Zu dieser Involution werden E und F die Doppelpunkte darstellen. (Das Weitere darüber unter §. 129.)

§. 126.

Involution von sechs Punkten einer Ebene; complexes Dreieckschnittsverhältniss. In derselben Weise wie das complexe Doppelverhältniss zwischen vier Punkten einer Ebene aufgestellt und seiner geometrischen Bedeutung nach untersucht worden ist, können ähnliche Erörterungen angestellt werden über ein complexes Dreieckschnittsverhältniss bei sechs Punkten einer Ebene, welche paarweise einander zugeordnet sind, wie

$$\frac{[AC']}{[C'B]} \cdot \frac{[BA']}{[A'C]} \cdot \frac{[CB']}{[B'A]} = \lambda + i\mu$$

oder symbolisch ausgedrückt:

$$[ABC, C'A'B'] = \lambda + i\mu.$$

Indem wir die allgemeineren Untersuchungen über ein System von sechs Punkten einer Ebene, auf welche sich ein derartiges Dreieckschnittsverhältniss bezieht, und die in gehöriger Vollständigkeit durchgeführt zu viel Raum in Anspruch nehmen, dabei doch ein ungleiches Interesse gewähren würden, hier übergehen, wollen wir uns auf Untersuchung desjenigen Dreieckschnittsverhältnisses beschränken, dessen Werth der negativen Einheit gleich ist, welches also nach Analogie der in §. 68 gegebenen Definition auf ein involutorisches Verhalten von sechs in einer Ebene liegenden Punkten hinweist. Das System derselben wird zu dem von beliebigen sechs Punkten einer Ebene in einem ähnlichen Verhältniss der Unterordnung stehen, wie das harmonische Viereck zu dem allgemeinen ebenen Viereck.

Da das complexe Dreieckschnittsverhältniss

$$\frac{[AC']}{[C'B]} \cdot \frac{[BA']}{[A'C]} \cdot \frac{[CB']}{[B'A]} = -1,$$

ebenso wie das reelle bei sechs Punkten einer Graden (§. 68) in das Product oder die Gleichheit zweier complexer Doppelverhältnisse, d. h. in

$$\frac{[AC']}{[C'B]} \cdot \frac{[BA']}{[A'A]} \cdot \frac{[AA']}{[A'C]} \cdot \frac{[CB']}{[B'A]} = 1,$$

oder in

$$[ABC'A'] . [ACA'B'] = 1,$$

mithin in

$$[ABC'A'] = [A'B'CA]$$

verwandelt werden kann; da ferner aus der Gleichheit dieser Doppelverhältnisse nach §. 111—114 ganz dieselben Folgerungen sich ziehen lassen, wie es bezüglich der reellen Doppelverhältnisse in §. 65—68 geschehen ist, so kann man den daselbst aufgestellten Definitionen entsprechend folgende aufstellen:

Wenn drei Punkte A, B, C einer Ebene einzeln drei anderen A', B', C' derselben Ebene so zugeordnet sind, dass ein complexes Doppelverhältniss zwischen vieren dieser sechs Punkte, wie $[ABCC']$ dem complexen Doppelverhältniss $[A'B'C'C]$ der den vier ersten zugeordneten Punkte gleich ist, so sollen (nach Möbius) die sechs Punkte der Ebene (oder die drei Punktepaare A und A', B und B', C und C') in Involution stehen oder eine Involution in der Ebene bilden.

Auf dieselbe Weise, wie in §. 66, lässt sich darthun, dass wenn bei drei Paaren von Punkten einer Ebene Ein complexes Doppelverhältniss von irgend vieren derselben demjenigen der vier zugeordneten gleich ist, dasselbe auch für jedes andere complexe Doppelverhältniss zwischen irgend vier andern der sechs Punkte und für dasjenige der vier zugeordneten Punkte gilt.

Die Involution von 6 Punkten einer Ebene wird somit auch durch jede der folgenden Gleichungen, welche denen des §. 69 entsprechen, ausgedrückt:

$$\text{A)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{[AA'BC]}{[A'AB'C']} = \dfrac{[AA'B'C]}{[A'ABC']} = 1, \\[2ex] \dfrac{[BB'CA]}{[B'BC'A']} = \dfrac{[BB'C'A]}{[B'BCA']} = 1, \\[2ex] \dfrac{[CC'AB]}{[C'CA'B']} = \dfrac{[CC'A'B]}{[C'CAB']} = 1, \end{array} \right.$$

$$\text{B)} \quad \begin{cases} [ABC,\ C'A'B'] = -1 \\ [A'BC,\ C'AB'] = -1 \\ [AB'C,\ C'A'B] = -1 \\ [ABC',\ CA'B'] = -1, \end{cases}$$

wobei die eckigen Parenthesenzeichen [] in den vier letzteren Ausdrücken ebenso wie bei den complexen Doppelverhältnissen andeuten sollen, dass das angedeutete Dreieckschnittsverhältniss, dessen Bedeutung und Auflösung in die gewöhnliche Form ganz nach den in §. 68 gegebenen Bemerkungen vorzunehmen ist, aus dem Producte von drei einfachen complexen Verhältnissen besteht.

Es kommt nun darauf an, die geometrische Bedeutung der Ausdrücke unter A) und B) oder die geometrischen Bedingungen, unter welchen sechs Punkte einer Ebene diesen Involutionsgleichungen genügen, nicht minder die besondern Fälle zu erörtern, wenn einer dieser Punkte als ein unendlich entfernter der Ebene angenommen wird und sein zugeordneter nach Analogie von §. 73 zu einem singulären, dem Centralpunkte wird, ferner wenn ein Punkt mit seinem conjugirten zusammenfällt oder zu einem Doppelpunkte wird u. s. w.

§. 127.

Auflösung und geometrische Deutung der Gleichungen des §. 126. Löst man jedes in dem Ausdrucke

$$[ABC,\ C'A'B'] = -1$$

enthaltene einfache complexe Verhältniss nach §. 109 auf, d. h. setzt man

$$-\frac{AC'}{C'B}\cdot(-1)^{\frac{-AC'B}{\pi}} \text{ für } \frac{[AC']}{[C'B]} \text{ u. s. w.,}$$

so erhält man

$$-1 = -\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot(-1)^{\frac{(-A'BC+BA'C+CB'A)}{\pi}}$$

eine Gleichung, welche nur bestehen kann, wenn der (absolute) Modulus

$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}$$

der Einheit und die Amplitude

$$AC'B + BA'C + CB'A$$

der Null oder einem graden Vielfachen von π gleich ist.

Die complexe Involutionsgleichung

$$[ABC,\ C'A'B'] = -1$$

ist demnach als der Complex der beiden Gleichungen

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1$$

und

$$AC'B + BA'C + CB'A = 0$$

anzusehen. Dieselben sollen, früheren Bezeichnungen analog, symbolisch durch

$$(ABC,\ C'A'B') = 1$$

und

$$ABC,\ C'A'B' = 0$$

angedeutet werden. Dabei sind in dem ersteren Ausdrucke die Abschnitte, welche die Verhältnisse desselben bilden, absolut zu nehmen; desgleichen ist der Drehungssinn, in welchem alle Winkel des zweiten Ausdrucks gleichmässig zu rechnen sind, beliebig, doch nach getroffener Wahl unveränderlich festzuhalten.

Die Auflösung des Ausdrucks

$$(ABC,\ C'A'B') = 1$$

in die gewöhnliche Form erfolgt ganz nach den in §. 68 gegebenen Vorschriften und eine Verwechslung desselben mit demjenigen für sechs Punkte einer Graden wird durch den Zusammenhang, in welchem der eine oder andere Ausdruck vorkommt, von selbst verhindert werden. — Die Deutung und Auflösung des Winkelausdrucks $ABC,\ C'A'B'$ erfolgt den Regeln des §. 112 gemäss einfach dadurch, dass man aus den drei ersten Buchstaben das Schema

$$A*B, \quad B*C, \quad C*A$$

bildet, das man durch die drei Buchstaben der zweiten Ternion der Reihe nach ausfüllt u. s. w., wodurch man

$$AC'B + BA'C + CB'A$$

erhält.

Das Product der drei Verhältnisse könnte man kurz ein Drillingsverhältniss der sechs Punkte der Ebene, sowie die durch $ABC,\ C'A'B'$ angedeutete Summe der drei Winkel $AC'B$, $BA'C$, $CB'A$ einen Drillingswinkel nennen.

In derselben Weise kann jede der übrigen unter B) aufgestellten Gleichungen des vorherg. §. in ein absolutes Dreieckschnitts-

oder Drillingsverhältniss und in einen dreifachen oder Drillingswinkel aufgelösst werden. Man erhält somit folgende acht Ausdrücke

$$\text{b)}\quad \begin{cases} (ABC,\ C'A'B') = 1 \text{ und } ABC,\ C'A'B' = 0 \\ (A'BC,\ C'AB') = 1 \quad \text{„}\ A'BC,\ C'AB' = 0 \\ (AB'C,\ C'A'B) = 1 \quad \text{„}\ AB'C,\ C'A'B = 0 \\ (ABC',\ CA'B') = 1 \quad \text{„}\ ABC',\ CA'B' = 0 \end{cases}$$

von denen zunächst je zwei in einer Zeile stehende die Involution von sechs Punkten einer Ebene vollständig ausdrücken.

Es lässt sich aber auch zeigen, dass aus irgend zwei der obigen 8 Gleichungen auf die Involution der betreffenden Punkte sicher geschlossen werden kann.

Zu dem Ende ist zuvor zu bemerken, einmal dass das absolute Dreieckschnittverhältniss in das Product zweier Doppelverhältnisse verwandelt werden kann, d. h. dass

$$1 = \frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = \left(\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'A}\right) \cdot \left(\frac{AA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A}\right)$$

oder

$$1 = (ABC,\ C'A'B') = (ABC'A')\ (ACA'B'),$$

mithin

$$(ABC'A') = A'B'CA$$

ist (vergl. §. 68), sodann, dass auch der dreifache Winkel in die Summe zweier Doppelwinkel umgesetzt werden kann, oder, dass man

$$0 = AC'B + BA'C + CB'A = AC'B + BA'A + AA'C + CB'A$$

oder

$$0 = ABC,\ C'A'B' = ABC'A' + ACA'B'$$

mithin

$$ABC'A' = A'B'CA$$

hat.

Bestehen nun für sechs Punkte A, B, C, A', B', C' einer Ebene die Winkelbeziehungen

$$ABC,\ C'A'B' = 0 \text{ oder } ABC'A' = A'B'CA$$
$$A'BC,\ C'AB' = 0 \text{ oder } AC'A'B = A'CAB' \text{ *)}$$

---

*) Denn aus $A'BC,\ C'AB' = 0$ folgt zunächst $A'BC'A = AB'CA'$; es ist aber $A'BC'A = C'AA'B = -AC'A'B$, ebenso $AB'CA' = -A'CAB'$, mithin $AC'A'B = A'CAB'$ (s. §. 113, 1 u. 2).

so hat man, weil für beliebige vier Punkte A, B, C', A' einer Ebene (§. 113, 3)

$$ABC'A' + AC'A'B + AA'BC' = \pi \text{ und ebenso}$$
$$A'B'CA + A'CAB' + A'AB'C = \pi$$

ist, auch

$$AA'BC' = A'AB'C$$

ferner nach demselben §.

$$\sin ABC'A' : \sin A'CA'B : \sin AA'BC' = (ABC'A') : (AC'A'B) : (AA'BC')$$
$$\sin A'B'CA : \sin AC'AB' : \sin A'AB'C = (A'B'CA) : (A'CAB') : (A'AB'C)$$

mithin

$$(ABC'A') : (AC'A'B) : (AA'BC') = (A'B'CA) : (A'CAB') : (A'AB'C).$$

Da aber auch (§. 113, 3)

$$1 = (ABC'A')\,(AC'A'B)\,(AA'BC') = (A'B'CA).(A'CAB').(A'AB'C)$$

ist, so ergiebt sich aus diesen Beziehungen

$$(ABC'A') = (A'B'CA) \text{ und } (AC'A'B) = (A'CAB'),$$

oder

$$\frac{(ABC'A')}{(A'B'CA)} = \frac{(A'BC'A)}{(AB'CA')} = 1,$$

d. i.

$$(ABC,\ C'A'B') = (A'BC,\ C'AB') = 1,$$

welches die zu den gegebenen Winkelgleichungen gehörigen Verhältnissgleichungen sind, aus deren Verbindung schliesslich die complexen Involutionsgleichungen

$$[ABC,\ C'A'B'] = [A'BC,\ C'AB'] = -1$$

hervorgehen.

Wie leicht ersichtlich, können mittels derselben so eben benutzten Beziehungen des §. 113 aus irgend zwei der unter b) aufgestellten Gleichungen zwei andere, die gegebenen zu complexen Involutionsgleichungen ergänzende Gleichungen hergeleitet werden, mögen übrigens die gegebenen nur Verhältnisse, oder nur Winkel, oder die eine Verhältnisse, die andere Winkel enthalten. Durch jede der somit abgeleiteten Involutionsgleichungen ist aber gemäss den bisherigen Definitionen das involutorische Verhalten der betreffenden sechs Punkte der Ebene dargethan.

Die geometrische Deutung zweier zusammengehöriger Gleichungen von b) wie

$$(ABC,\ C'A'B') = 1 \text{ und } ABC,\ C'A'B' = 0,$$

ist leicht zu geben. Nach denselben sind drei Paare von Punkten einer Ebene A und A', B u. s. w. in Involution,

wenn in dem (einfachen) Sechseck $AC'BA'CB'A$, in welchem jedesmal die zugeordneten zwei Punkte eines Paares gegenüberstehende Ecken sind, das Product der ersten, dritten und fünften Seite gleich dem Producte der übrigen ist und die Summe des ersten, dritten und fünften Winkels der Summe der übrigen Winkel und $= 0$ oder einer graden Anzahl gestreckter Winkel gleich ist.

Dieselbe Deutung lassen die übrigen drei unter b) aufgestellten Paare von Gleichungen zu, welche sich auf die (einfachen) Sechsecke

$$A'C'BACB'A', \quad AC'B'A'CBA, \quad ACBA'C'B'A$$

beziehen und somit gleichmässig auf ein und dasselbe System involutorischer Punktepaare einer Ebene Anwendung finden.

Die Auflösung und geometrische Deutung der Gleichungen A) ergiebt sich nach §. 111—113 in derselben Weise, wie die der Gleichungen B) und man kann z. B. statt der die Involution ausdrückenden Gleichung

$$[AA'BC] = [A'AB'C']$$

auch die Gleichheit der entsprechenden absoluten Doppelverhältnisse und der Doppelwinkel:

$$(AA'BC) = (A'AB'C') \text{ und } AA'BC = A'AB'C'$$

setzen, welche einfach besagen, dass drei Paare A und A', B u. s. w. zugeordneter Punkte einer Ebene in Involution sind, wenn das absolute Doppelverhältniss von vier Punkten dem der vier zugeordneten Punkte und der dem ersten Doppelverhältnisse entsprechende Doppelwinkel dem Doppelwinkel, der dem zweiten entspricht, gleich ist.

Es kam somit jede der Gleichungen A) durch eins der folgenden Paare zusammengehöriger Gleichungen vertreten werden:

$$\text{a)} \quad \begin{cases} (AA'BC) = (A'AB'C') \text{ und } AA'BC = A'AB'C', \\ (BB'CA) = (B'BC'A') \text{ und } BB'CA = B'BC'A', \\ (CC'AB) = (C'CA'B') \text{ und } CC'AB = C'CA'B'. \end{cases}$$

In derselben Weise wie oben lässt sich aber auch nachweisen, dass irgend zwei dieser Gleichungen hinreichen, die Involution der sechs Punkte in der Ebene ausdrücken. Dasselbe ergiebt sich übrigens schon aus den Betrachtungen von §. 118 und 119 2). Sind nämlich von sechs in Involution stehenden Punkten A, A', B, B'

C, C' einer Ebene die fünf ersten gegeben, und sollen dabei A und A', B und B' einander entsprechende sein, so ist der sechste C' bestimmt, wenn von vier Punkten, unter denen C', nicht aber zugleich C, sich befindet, zwei von einander unabhängige Quaternionen (Doppelverhältnisse oder Doppelwinkel) gegeben sind. Diese sind aber durch die gleichgebildeten Quaternionen der vier zugeordneten Punkte unter denen sich C' nicht befinden kann, gegeben, folglich u. s. w.

§. 128.

Centralpunkt involutorischer Punkte einer Ebene. Nimmt man von sechs in Involution stehenden Punkten A und A', B und B', C und C' einer Ebene einen z. B. C' nach irgend welcher Richtung unendlich entfernt an, für welchen Fall der zugeordnete Punkt mit O bezeichnet werden soll, so vereinfachen sich die Gleichungen A), B), sowie a) und b) in ähnlicher Weise, wie in §. 73 die Gleichungen A*) und B*) aus A) und B) des §. 69 hervorgingen. Man erhält somit

$$\text{A*)}\quad \begin{cases} \dfrac{[OA]}{[OA']} = \dfrac{[AB]}{[BA']}\cdot\dfrac{[AB']}{[B'A']}; \quad \dfrac{[OB]}{[OB']} = \dfrac{[BA]}{[AB']}\cdot\dfrac{[BA']}{[A'B']}, \\ [OA].[OA'] = [OB].[OB'] \text{ oder } [AO]:[OB] = [B'O]:[OA']; \end{cases}$$

$$\text{B*)}\quad \begin{cases} \dfrac{[OA']}{[A'B]} = \dfrac{[OB']}{[B'A]}; \quad \dfrac{[OA]}{[AB]} = \dfrac{[OB']}{[B'A']}; \\ \dfrac{[OA']}{[A'B']} = \dfrac{[OB]}{[BA]}; \quad \dfrac{[OA]}{[AB']} = \dfrac{[OB]}{[BA']}. \end{cases}$$

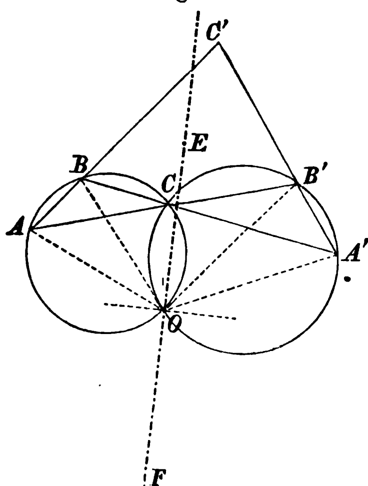
Diesen entsprechen ebenso viele Gleichungen mit absoluten Verhältnissen und dazu gehörige Winkelgleichungen, welche man durch Auflösung der complexen Ausdrücke nach §. 109, 1. erhält:

$$\text{a*)}\quad \begin{cases} \dfrac{OA}{OA'} = \dfrac{AB}{BA'}\cdot\dfrac{AB'}{B'A'} \text{ und } AOA' = ABA' + AB'A', \\ \dfrac{OB}{OB'} = \dfrac{BA}{AB'}\cdot\dfrac{BA'}{A'B'} \text{ und } BOB' = BAB' + BA'B', \\ OA.OA' = OB.OB' \text{ und } AOB = B'OA', \text{ sowie } AOB' = BOA', \end{cases}$$

$$\text{b*)}\quad \begin{cases} \dfrac{OA'}{A'B} = \dfrac{OB'}{B'A} \text{ und } OA'B = OB'A; \quad \dfrac{OA}{AB} = \dfrac{OB'}{B'A'} \text{ und } OAB = OB'A'; \\ \dfrac{OA'}{A'B'} = \dfrac{OB}{BA} \text{ und } OA'B' = OBA; \quad \dfrac{OA}{AB'} = \dfrac{OB}{BA'} \text{ und } OAB' = OBA'. \end{cases}$$

Sowohl die Verhältniss- als auch in Uebereinstimmung damit die Winkelgleichungen lassen nachstehende Deutung und Folgerungen zu:

Fig. 52.



1) Wegen $OAB' = OBA'$ (Fig. 52) und $OB'A = OA'B$ oder $AB'O = BA'O$ sind die Dreiecke OAB' und OBA' einstimmig ähnlich (§. 22); desgleichen, wegen $OAB = OB'A'$ und $OBA = OA'B'$, sind es auch die Dreiecke OAB und $OB'A'$.

2) Weil $AOB = B'OA'$ und auch $AOB' = BOA'$ ist, so haben die Winkel AOA', BOB' eine gemeinsame Halbirungslinie OE oder OF*). Diese Halbirungslinie mag die Involutionsaxe**) heissen.

3) Sind von den Punkten O, A, A', B, B' alle bis auf B' gegeben, so lässt sich der letztere durch Construction eines dem Dreieck OAB oder $OA'B$ einstimmig ähnlichen Dreiecks $OB'A'$ oder bezüglich $OB'A$ unzweideutig bestimmen. Daraus ist im Voraus abzunehmen, dass sich auch der Centralpunkt O für die Punkte A, B, A', B' unzweideutig bestimmen lassen werde.

4) Ebenso lässt sich zu den Punkten O, A, A', B, B', C der siebente C' finden, für den man hat

$$OA \, . \, OA' = OB \, . \, OB' = OC \, . \, OC'$$

und

---

*) Denn ist OE die Halbirungslinie von AOA und OF die von BOB', so ist §. 16, 5)

$$OE{}^\wedge OF = \frac{OA{}^\wedge OB + OA'{}^\wedge OB'}{2} \text{ d. i. } 2\,EOF = AOB + A'OB' = 0,$$

folglich $EOF = 0$ oder $= 180^0$.

**) Möbius: Berichte der K. S. Gesellschaft d. Wissensch. 1853. S. 178.

$$AOB = B'OA', \quad AOC = C'OA', \quad (BOC = C'OB',)$$

oder

$$AOB' = BOA', \quad AOC' = COA', \quad (BOC' = COB'),$$

oder für den die Dreiecke

$$AOC \text{ und } C'OA', \text{ sowie } BOC \text{ und } C'OB'$$

einstimmig ähnlich sind, woraus übrigens von selbst folgt, dass auch die Dreiecke AOB und $B'OA'$, sowie AOB' und BOA', BOC' und COB', COA' und AOC' einstimmig ähnlich sind, sowie dass die Winkel

$$AOA', \quad BOB', \quad COC'$$

von einer und derselben Graden halbirt werden. Drei in solcher Beziehung stehende Punktepaare A und A' B und B', C und C' einer Ebene sind dann wieder in Involution. Denn es folgt aus den Voraussetzungen nach b*)

$$\frac{OA}{OB} = \frac{AB'}{BA'} \text{ und } BOA = BA'^{\wedge}AB',$$

$$\frac{OB}{OC} = \frac{BC'}{CB'} \text{ und } COB = CB'^{\wedge}BC',$$

$$\frac{OC}{OA} = \frac{CA'}{AC'} \text{ und } AOC = AC'^{\wedge}CA'.$$

Durch Multiplication der Verhältnissgleichungen erhält man

α) $$1 = (ABC, C'A'B'),$$

und die Addition der Winkelgleichungen giebt

$$0 = AC'^{\wedge}CA' + CB'^{\wedge}BC' + BA'^{\wedge}AB'.$$

Es ist aber

$$AC'^{\wedge}CA' = AC'^{\wedge}BC' + BC'^{\wedge}CA',$$
$$BA'^{\wedge}AB' = BA'^{\wedge}CA' + CA'^{\wedge}AB',$$
$$CB'^{\wedge}BC' = CB'^{\wedge}AB' + AB'^{\wedge}BC';$$

Aus der Summe dieser drei Gleichungen folgt mit Berücksichtigung der vorhergehenden

β) $$AC'B + BA'C + CB'A = ABC, C'A'B' = 0.$$

α) und β) sind aber zwei der unter b) in §. 127 bemerkten Involutionsgleichungen für die Punktepaare A und A', B und B', C und C'; folglich u. s. w.

5) Hieraus fliessen folgende Definitionen für die Involution von Punkten in einer Ebene:

Drei und mehrere Paare von Punkten einer Ebene A und A', B und B', C und C' etc. sind in Involution, wenn sich in der Ebene ein Punkt O (der Centralpunkt) so bestim-

men lässt, dass erstens die Producte $OA.OA'$, $OB.OB'$, $OC.OC'$ etc. von gleicher Grösse sind und dass zweitens die Winkel AOA', BOB', COC' etc. von einer und derselben Graden (der Involutionsaxe) halbirt werden, oder dass es zwei Paare von einstimmig ähnlichen Dreiecken wie AOB und $B'OA'$, BOC und $C'OB'$, AOB' und BOA' u. s. w. giebt.

§. 129.

Construction des Centralpunktes. Da die Lage des Centralpunktes O zu zwei beliebigen Punktepaaren A und A', B und B' der Ebene die Einstimmigkeit und Aehnlichkelt der Dreiecke AOB' und BOA' (Fig. 52), also die Gleichheit der Winkel 1) OAB', OBA' und 2) $OB'A$, $OA'B$ bedingt; so ist, wenn AB' und BA' sich in C schneiden, also A, B', C sowohl als auch B, A', C in nicht zu bestimmender Reihenfolge in einer Graden liegen, nach §. 21, 1) $2OAB' = 2OAC$ und $2OBA' = 2OBC$, mithin wegen 1) $2OAC = 2OBC$. Hieraus folgt aber nach §. 21, 2) dass die Punkte O, A, B, C in einer Kreisperipherie liegen. Da aus gleichen Gründen $2OB'A = 2OB'C$ und $2OA'B = 2OA'C$, also wegen 2) auch $2OB'C = 2OA'C$ ist, so liegen auch O, A', B' C in einer Kreisperipherie.

Legt man also durch C — den gegenseitigen Durchschnitt der Graden AB' und BA' — zwei Kreise, von denen der eine noch durch A und B, der andere durch A' und B' geht, so ist der zweite Durchschnittspunkt O der Kreise der Centralpunkt zu A und A', B und B'.

Die Einstimmigkeit und Aehnlichkeit der Dreicke AOB' und BOA' ergiebt sich nun nach dieser Construction wieder wie folgt. Da A, B', C in grader Linie liegen und ebenso B, A', C, so ist $2OAB' = 2OAC$ und $2OBA' = 2OBC$, ferner, weil O, A, B, C in einem Kreise liegen, so ist $2OAC = 2OBC$, folglich 1) $2OAB' = 2OBA'$. In gleicher Weise ergiebt sich aus $2OA'B = 2OA'C$ und $2OB'A = 2OB'C$ und der Kreislage von O, A', B', C die Gleichheit der Winkel $2OA'B$ und $2OB'A$ oder 2) $2AB'O = BA'O$. Aus 1) und 2) folgt aber die Einstimmigkeit und Aehnlichkeit der Dreiecke AOB' und BOA' (oder OAB' und OBA')*).

---

*) Sind α, β, γ und α', β', γ' die in gleichem Sinne genommenen Winkel zweier Dreiecke in einer Ebene, so folgt die Einstimmigkeit und Aehnlichkeit der beiden Dreiecke nicht blos aus $\alpha = \alpha$

§. 130.

Zusätze und Folgerungen. 1) Da auch die Dreiecke AOB und $B'OA'$ einstimmig ähnlich, oder die Winkel OAB und $OB'A'$ sowie OBA und $OA'B'$ gleich sind, so folgt, wenn C' den Durchschnittpunkt der Graden AB und $B'A'$ bezeichnet, nach derselben Schlusweise, dass auch die Punkte O, A, C', B' in einer Kreisperipherie liegen, dass dasselbe mit den Punkten O, A', C', B der Fall ist und somit O der zweite Durchschnitt auch der um A, C', B', sowie um $A'C'B$ gelegten Kreise ist; d. h. die vier Kreise, welche um die vier in einem vollständigen Vierseit (mit den Seiten AB, $A'B'$, AB', $A'B$) enthaltenen Dreiecke beschrieben sind, schneiden sich in einem und demselben Punkte (O).

2) Hieraus folgt, dass O der gemeinschaftliche Centralpunkt für die Punktepaare A und A', B und B', C und C' ist, dass also diese Paare in Involution sind.

Oder: die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits sind in Involution, so dass die gegenüberstehenden Ecken zugeordete Paare derselben bilden, wie bereits in §. 114 auf anderem Wege gefunden worden ist.

Die aus dieser Involution folgenden Gleichungen $(ABC, C'A'B') = (ABC', CA'B') = (AB'C, C'A'B) = (A'BC, C'AB') = 1$ (wobei die Abschnitte absolut genommen sind) drücken den Satz des Menelaus aus, angewendet auf jedes der vier in den Vierseit enthaltenen Dreiecke, dessen Seiten von der jedesmaligen vierten Graden in drei Punkten geschnitten werden.

§. 131.

Doppelpunkte der Involution. Wird bezüglich der allgemeinen Gleichungen A) und B) §. 126 oder a) und b) §. 127 die

---

und $\beta = \beta'$, sondern auch aus a) $2\alpha = 2\alpha'$ und $2\beta = 2\beta'$. Die in gleichem Sinne gerechneten Winkel eines Dreiecks sind nämlich entweder alle drei hohl oder alle drei erhaben. Wollte man also aus a) nicht $\alpha = \alpha'$, sondern c) $\alpha = 180^0 + \alpha'$ folgern, so müsste auch d) $\beta = 180^0 + \beta'$ sein. Da nun in allen Fällen $\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma' = 180^0$ ist, so würde hieraus und aus c) und d) $\gamma = \gamma'$ folgen, was unstatthaft ist. Daher muss aus a) und b) auf $\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$ oder auf die Aehnlichkeit und Einstimmigkeit der Dreiecke geschlossen werden; vergl. auch §. 22.

Voraussetzung gemacht, dass zwei zugeordnete Punkte C und C' in Einem E oder F zusammenfallen, so gestalten sich die Gleichungen A) und B) in ähnlicher Weise wie in §. 78 um und gehen ebenfalls in quadratische in Betreff des Punktes E über, in Folge dessen zwei Punkte E und F der Ebene, welche wieder die Doppelpunkte der Involution heissen sollen, der gemachten Annahme Gnüge leisten.

Die somit aus A) und B) hervorgehenden Gleichungen sind

$$\text{A}^{**})\quad \begin{cases} [AA'BE]\,[AA'B'E] = 1 \text{ oder } \dfrac{[AB]}{[BA']}\cdot\dfrac{[AB']}{[B'A']} = \dfrac{[AE]^2}{[EA']^2}, \\ [BB'AE]\,[BB'A'E] = 1 \text{ oder } \dfrac{[BA]}{[AB']}\cdot\dfrac{[BA']}{[A'B']} = \dfrac{[BE]^2}{[EB']^2}, \end{cases}$$

$$\text{B}^{**})\quad \begin{cases} [ABE,\ EA'B'] = -1, \\ [A'BE,\ EAB'] = -1. \end{cases}$$

Dieselben aufgelösst geben die absoluten Verhältnissgleichungen und Winkelbeziehungen:

$$\text{a}^{**})\quad \begin{cases} \dfrac{AB}{BA'}\cdot\dfrac{AB'}{B'A'} = \left(\dfrac{AE}{EA'}\right)^2 \text{ und } 2AEA' = ABA' + AB'A', \\ \dfrac{BA}{AB'}\cdot\dfrac{BA'}{A'B'} = \left(\dfrac{BE}{EB'}\right)^2 \text{ und } 2BEB' = BAB' + BA'B'. \end{cases}$$

$$\text{b}^{**})\quad \begin{cases} (ABE,\ EA'B') = 1 \text{ und } ABE,\ EA'B' = 0, \\ (A'BE,\ EAB') = 1 \text{ und } A'BE,\ EAB' = 0. \end{cases}$$

1) Vergleicht man die Verhältnisse und Winkelgleichungen unter a**) mit den unter a*) des §. 128, so ergeben sich die einfacheren Beziehungen

$$\frac{OA}{OA'} = \left(\frac{AE}{EA'}\right)^2 \text{ und } AOA' = 2AEA',$$

$$\frac{OB}{OB'} = \left(\frac{BE}{EB'}\right)^2 \text{ und } BOB' = 2BEB'.$$

d. h. der Ort von E ist die Peripherie eines durch AA' geführten Kreises (vgl. Fig. 52), dessen Mittelpunkt wieder in einem durch A, O, A' gezogenen Kreise sowie in einer die AA' senkrecht halbirenden Graden enthalten ist und mit O auf einerlei Seite der AA' liegt.

Da auch der Ort von E in derselben Weise bezüglich der Punkte B, O, B' sich bestimmen lässt, so geht daraus hervor, dass die Durchschnittspunkte dieser beiden Ortskreise den Eigenschaften eines Doppelpunktes entsprechen, d. h. die beiden Doppelpunkte E und F selbst sind.

2) Noch einfacher sind die Beziehungen, welche man nach §. 128, 4) erhält, wenn man zwei zugeordnete Punkte in einen Doppelpunkt zusammenfallen lässt:

$$OA.OA' = OB.OB' = OE^2,$$

oder

$$OA : OE = OE : OA', \quad OB : OE = OE : OB',$$

und

$$AOE = EOA', \quad BOE = EOB',$$

in denen man überall den Punkt E mit F vertauschen kann. Aus den Winkelgleichungen ergiebt sich nämlich sofort, dass der Doppelpunkt E (somit auch F) auf der gemeinschaftlichen Halbirungslinie der Winkel AOA', BOB' d. h. auf der Involutionsaxe liegt; und hieraus, sowie aus den vorstehenden Proportionen folgt noch die Aehnlichkeit und Einstimmigkeit der Dreiecke AOE und EOA' sowie BOE und EOB' (oder AOF und FOA', BOF und FOB').

Dass den oben angeführten Proportionen und Winkelgleichungen zwei Punkte E und F gleichmässig entsprechen, ergiebt sich auch daraus, dass, jenachdem man für die Winkel AOA', BOB' den einen oder andern Drehungssinn annimmt, die gemeinschaftliche Halbirungslinie derselben von O aus gerechnet die eine oder die andere der beiden einander entgegengesetzten Richtungen erhält; d. h. es liegen die Punkte E, O, F in Einer Graden.

3) Hieraus, sowie aus der für beide Doppelpunkte E, F gleichmässig giltigen Relation

$$OA.OA' = OE^2 = OF^2$$

geht ferner hervor, dass auch hier, wie bei der Involution in einer Graden, die Entfernung EF beider Doppelpunkte vom Centralpunkte O halbirt wird.

4) Die Aehnlichkeit und Einstimmigkeit der Dreiecke AOE und EOA', AOF und FOA', ferner BOE und EOB', BOF, FOB' zeigt noch nach den Erörterungen des §. 121, dass E und F mit jedem der Punktepaare A und A', B und B' in einem Kreise liegen und ein harmonisches Viereck bilden, oder $[AA'EF] = [BB'EF] = -1$ ist; ein Resultat, was auch unmittelbar den Gleichungen A**) entnommen werden kann (m. s. §. 79).

5) Die Construction der Doppelpunkte E und F kann somit nach vorausgegangener Bestimmung des Centralpunktes O nach §. 123 vorgenommen werden, indem von den harmonischen

Punkten A, A', E, F, oder von B, B', E, F die beiden ersten A, A' oder B, B' sowie die Mitte O der beiden gesuchten E, F gegeben ist. Diese Construction ist bereits oben unter 1) mit andern Worten angedeutet.

In Betracht, dass die Doppelpunkte auf der Involutionsaxe liegen, kann die Bestimmung der Mittelpunkte der durch A, A', E, F, und B, B', E, F gehenden Kreise auch dadurch geschehen, dass man durch O eine Senkrechte zur Involutionsaxe zieht und dieselbe durch Grade, welche die AA' und BB' senkrecht halbiren, schneidet. Die beiden Durchschnittspunkte sind die gesuchten Mittelpunkte.

6) Weil endlich nach dem Vorhergehenden zu vier Punkten A und A', B und B' einer Ebene oder zu drei und mehreren in Involution stehenden Punktepaaren stets die beiden Doppelpunkte E und F zu construiren sind, so kann man für die Involution von Punkten einer Ebene auch folgende Definition aufstellen:

Drei und mehrere Paare von Punkten einer Ebene A und A', B und B', C und C' etc. sind in Involution, wenn sich in der Ebene zwei (hier stets reelle) Punkte E und F bestimmen lassen, mit denen jedes Paar in Harmonie ist (im Allgemeinen ein harmonisches Viereck bildet); d. h. wenn $[EFAA'] = [EFBB'] = [EFCC'] = \ldots = -1$ ist.

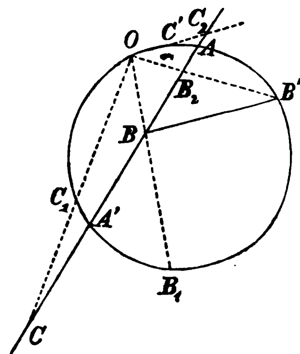
§. 132.

Besondere Fälle der Involution von Punkten einer Ebene. 1) Liegen die Punkte A, A', B, B' in Einer Graden, so treten die im vierten Capitel erörterten Beziehungen ein. Der Centralpunkt liegt auf derselben Graden und zwar ausserhalb der Abschnitte AA' und BB', wenn dieselben nicht in einander eingreifen. (§. 74.) In beiden Fällen kann man sagen, der Centralpunkt ist der Durchschnittspunkt der Graden $AA'BB'$ mit der gemeinschaftlichen imaginären oder reellen Sehne der über AA' und BB' als Durchmessern beschrieben Kreise. Die Axe der Involution als die Halbirungslinie der Winkel AOA', BOB' fällt entweder mit der Graden $AA'BB'$ zusammen, oder steht auf derselben senkrecht, je nachdem der Punkt O ein äusserer oder innerer der Abschnitte AA', BB' ist, oder je nachdem die Winkel AOA', $BOB' = 0$ oder 180^0 sind. Die Doppelpunkte E, F der Involution liegen somit im ersteren Falle auch auf der Graden $AA'BB'$, oder sind, wie man sich

für die longimetrischen Beziehungen auszudrücken pflegt, reell (können aber in anderer Hinsicht als die imaginären Durchschnittspunkte der über AA' und BB' als Durchmessern beschriebenen Kreise angesehen werden); während im zweiten Falle die reellen Durchschnittspunkte E, F der über AA' und BB' als Durchmessern beschriebenen Kreise als Doppelpunkte zu betrachten sind, die, weil sie ganz ausserhalb der Graden AA' liegen, als für diese Grade imaginäre Punkte bezeichnet werden. Sowie übrigens die Punktepaare A, A' und E, F oder B, B' und E, F im ersteren Falle harmonische Paare zugeordneter Punkte in einer Graden sind, so bilden im zweiten Falle dieselben Paare die gegenüberliegenden Punkte eines harmonischen Vierecks in der Ebene, wobei der Mittelpunkt O des Abschnitts EF stets ein Punkt der andern Abschnitte AA' oder BB' ist.

2) Liegt von zwei Paaren zugeordneter Punkte A und A', B und B ein Punkt des einen Paares z. B. B in der durch das andere Paar A, A' gezogenen Graden (Fig. 53), so giebt, wenn O wieder den Centralpunkt dieser Paare bezeichnet, die Aehnlichkeit und Einstimmigkeit der Dreiecke AOB' und BOA' folgende Vereinfachung der Construction von O an die Hand. Man lege durch die Punkte A, A', B' einen Kreis, schneide von A' aus einen dem Bogen $B'A$ gleichen und gleichsinnigen Bogen $A'B_1$ ab, und ziehe die Grade B_1B, welche den Kreis zum zweiten Male in dem Centralpunkte O schneidet. Denn man hat hiernach $AOB' = B_1OA' = BOA'$, ebenso $OB'A = OA'A = OA'B$, woraus die Einstimmigkeit und Aehnlichkeit der Dreiecke AOB' und BOA', sowie alle übrigen unter a*) und b*) (§. 128) bemerkten Beziehungen hervorgehen.

Fig. 53.



Nimmt man einen fünften Punkt C' in der Peripherie desselben um A, A', B', folglich auch um O gelegten Kreises an, und will den sechsten zur Involution oder zu demselben Centralpunkt O gehörigen Punkt C bestimmen, so hat man für diesen auch

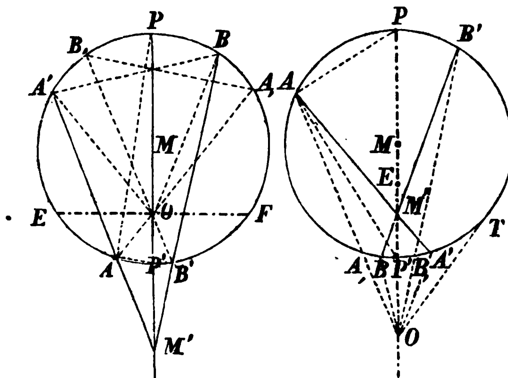
$$AOC' = COA' \text{ und } OC'A = OA'C,$$

d. h. es ist C der Durchschnittspunkt von AA' mit einer Graden OC_1, für welche der Bogen $A'C_1$ gleich und gleichsinnig dem Bogen $C'A$ ist. Auf gleiche Weise wird man für jeden Punkt des Kreises um O, A, A' einen zugeordneten in der durch A, A' gelegten Graden finden und so ist auch z. B. dem Punkte B_2 der Punkt B_1, dem Punkte C_2 der Punkt C_1 zugeordnet. Daher überhaupt:

Dem durch O, A, A' gelegten Kreise ist die durch A, A' gelegte Grade, und umgekehrt der durch A, A' gelegten Graden der durch O, A, A' gezogene Kreis zugeordnet.

3) Es mögen ferner die Paare zugeordneter Punkte A und A', B und B' in einer Kreislinie, deren Mittelpunkt M sei, liegen. (Fig. 54.) Ist nun O der zunächst auf gewöhnliche Weise bestimmte

Fig. 54 a. und 54 b.



Centralpunkt dieser Punktepaare und zieht man durch O den Durchmesser des Kreises, welcher denselben in den Punkten P, P' schneide, treffen ferner die Graden OA und OB' den Kreis zum zweiten Male in den Punkten resp. A_1 und B_1, so hat man

$$AB'B_1 = AA_1B_1 \quad \text{oder} \quad AB'O = OA_1B_1;$$

nun ist

$$AB'O = BA'O,$$

folglich

$$OA_1B_1 = BA'O.$$

Da auch

$$B_1A_1B = B_1A'B,$$

so folgt

$OA_1B = B_1A'O$, hieraus, sowie aus
$BOA_1 = B_1OA'$,

ergiebt sich weiter die Aehnlichkeit der Dreiecke

OA_1B und $OA'B_1$,

sowie

1) $OA_1 : OB = OA' : OB_1$.

Weil aber nach den Gleichungen a*) §. 128 $OA . OA' = OB : OB'$ und nach einer bekannten Eigenschaft des Kreises $OA . OA_1 = OB' . OB_1$, so hat man auch

2) $OA' : OA_1 = OB : OB_1$

woraus in Verbindung mit 1)

3) $OA' = OA_1$ und $OB = OB_1$

folgt. Es muss demnach der durch O gezogene Durchmesser PP' eine gemeinschaftliche Halbirungslinie der Winkel $A'OA_1$ und BOB_1 sein, und wenn man noch die Grade AP zieht, so wird diese den Winkel $A'AA_1$ oder $A'AO$ halbiren.

Da ferner AP und AP' senkrecht auf einander stehen, so bilden AA', AO, AP, AP' ein harmonisches Strahlenbüschel (§. 46, 3), oder es ist $(PP'OM') = -1$ wenn M' der Punkt ist, in welchem der Durchmesser PP' von der AA' getroffen wird. Da ein Gleiches auch bezüglich der Strahlen $B'B$, $B'O$, $B'P$, $B'P'$ gilt, so folgt, dass M' der gemeinschaftliche Durchschnitt von AA', BB' und PP' ist. Hat man demnach noch ein drittes Paar zugeordneter Punkte CC', welche in der Peripherie desselben Kreises liegen und deren Verbindungslinie durch denselben Punkt M' geht, so wird auch für dieses und jedes der vorhergehenden Paare O der gemeinschaftliche Centralpunkt sein. Wir schliessen hieraus:

Die Paare von Endpunkten zweier und mehrerer in einem Punkte (M') sich schneidender Sehnen eines Kreises (M) sind in Involution. Der Centralpunkt (O) dieser Involution liegt in dem durch den gemeinsamen Durchschnittspunkt (M') der Sehnen gelegten Durchmesser (PP') des Kreises dergestalt, dass der Durchmesser in dem Durchnittspunkte der Sehnen (M') und im Centralpunkte (O) harmonisch getheilt wird. Ferner:

Befindet sich der Durchschnitt M' der Sehnen AA', BB'... $\left\{\begin{matrix}\text{innerhalb}\\ \text{ausserhalb}\end{matrix}\right\}$ des Kreises, so liegt der Centralpunkt O $\left\{\begin{matrix}\text{ausserhalb}\\ \text{innerhalb}\end{matrix}\right\}$

desselben. Da die Punkte P, P' als die Endpunkte des durch O gelegten Durchmessers ebenfalls zugeordnete Punkte der Involution sind, so halbirt die Involutionsaxe den Winkel POP', ist also PP' selbst, wenn O ausserhalb des Kreises liegt, steht dagegen auf PP' senkrecht, wenn O innerhalb desselben liegt. Die Doppelpunkte E, F sind, wenn O ausserhalb liegt, auf der PP' durch die Beziehung $OP.OP' = OE^2 = OF^2$ ihrer Entfernung nach von O bestimmt, indem OE oder OF absolut genommen der von O aus an den Kreis gelegten Tangente gleich ist. Fällt O innerhalb des Kreises, so sind die Doppelpunktg E und F die Durchschnittspunkte des Kreises mit der auf PP' senkrechten Involutionsaxe, da auch in diesem Falle OE oder OF absolut $= \sqrt{OP.OP'}$ ist. Man kann demnach auch sagen: Es ist

$(PP'EF) = -1$ wenn O ausserhalb des Kreises liegt,

und $[PP'EF] = -1$ wenn O innerhalb des Kreises fällt.

Da $(PP'OM') = -1$ ist, so hat man, wenn M der Mittelpunkt des Kreises oder von PP' ist, nach §. 52 XII. $OP.OP' = OM'.OM$; folglich sind E und F auch die $\left\{\begin{matrix}\text{reellen}\\\text{imaginären}\end{matrix}\right\}$ Doppelpunkte der Paare P und P', M und M', wenn die Punkte des einen Paares $\left\{\begin{matrix}\text{gleichartig}\\\text{ungleichartig}\end{matrix}\right\}$ bezüglich des Abschnitts des andern Paares sind, oder wenn M' $\left\{\begin{matrix}\text{innerhalb}\\\text{ausserhalb}\end{matrix}\right\}$ des Kreises liegt.

Sechstes Capitel.

Von den geometrischen Verwandtschaften der Figuren.

---

§. 133.

Vorbemerkungen. Die ältere Elementargeometrie betrachtet und benutzt drei Beziehungen der Figuren zu einander: die Gleichheit und Aehnlichkeit (Congruenz), die Aehnlichkeit und die (Flächen-) Gleichheit. Die zwei ersteren dieser Verwandtschaften bestehen allgemein darin, dass einem Punkte (Elemente) der einen Figur ein Punkt (Element) der andern nach einem gewissen Gesetze entspricht, welches das eigentliche Wesen der betreffenden Verwandtschaft charakterisirt. Jede Art dieser Verwandtschaften führt dann zu einer gewissen Classe von Sätzen und Aufgaben, wie sie in der Regel ein wohlgegliedertes System der Elementargeometrie hervortreten lässt. Betrachtet man nun die allgemeinen Bedingungen und Eigenschaften, unter denen zwei Figuren in einer dieser Verwandtschaften zu einander stehen, so findet sich, dass

1) Figuren ähnlich gleich sind, wenn der gegenseitige Abstand je zweier Punkte der einen Figur dem gegenseitigen Abstande der entsprechenden Punkte der andern Figur gleich ist. Als eine Folge hiervon ergiebt sich für Figuren in einer Ebene, dass zwischen allen entsprechenden Winkeln und Flächentheilen ebenfalls Gleichheit besteht, dass je zwei Grade der einen Figur sich in Punkten schneiden, welche für sich ein System bilden, dass dem aus den Durchschnitten der entsprechenden Graden der andern Figur gebildeten Systeme ähnlich gleich ist etc.

2) Zwei Figuren sind einander blos **ähnlich**, wenn die gegenseitigen Abstände je zweier Punkte der einen Figur in denselben Verhältnissen zu einander stehen, wie die Abstände der entsprechenden Punkte der andern Figur; oder wenn das Verhältniss entsprechender Abstände in beiden Figuren durchweg ein und dasselbe ist. (Das System der Punkte A, B, C, D... ist dem von A', B', C', D'... ähnlich, wenn $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AD}{A'D'} = \frac{BC}{B'C'} = \ldots = m$ ist). Als eine Folge hiervon ergiebt sich, dass bei ebenen Figuren auch zwischen entsprechenden Winkeln und den Verhältnissen entsprechender Flächenräume Gleichheit statt findet. Desgleichen bilden die Durchschnitte je zweier Graden der einen Figur und die Durchschnitte entsprechender Graden der andern wieder ähnliche Systeme, deren einzelne Theile in demselben Verhältnisse zu einander stehen, wie die gleichartigen Theile der ursprünglichen ähnlichen Figuren. Ist das constante Verhältniss m der entsprechenden Strecken $AB : A'B'$ etc. der Einheit gleich, so geht die Aehnlichkeit in die Aehnlichgleichheit über, welche letztere Verwandtschaft somit als specieller Fall der Aehnlichkeit dasteht.

3) Zwei Figuren sind nach der gewöhnlichen Definition einander **gleich**, wenn sie einerlei Flächeninhalt haben. Hiernach kann man sich ein Dreieck einem Viereck oder irgend einem Vielecke gleich denken. Soll indess die Gleichheit ebenfalls wie die beiden vorhergehenden (und die folgenden allgemeineren) Verwandtschaften als eine Beziehung aufgefasst werden, wornach einem jedem Punkte der einen Figur Ein Punkt oder allgemeiner Ein Element der andern Figur nach einem gewissen Gesetze entspricht; so muss der Begriff der Gleichheit in einer etwas engern Bedeutung genommen werden, demzufolge*):

Zwei (ebene) Figuren oder Systeme von Punkten gleich genannt werden, wenn die durch irgend eine Anzahl Punkte bestimmten Fächentheile der einen Figur den Flächentheilen der andern Figur gleich sind, welche die entsprechenden Punkte zu Ecken haben.

So ist das Viereck $ABCD$ dem Viereck $A'B'C'D'$ gleich, wenn nicht nur diese Vierecke selbst, sondern auch die entsprechenden

*) Möbius: Barycentr. Calcul §. 161.

Flächentheile *ABC* und *A'B'C'*, *BCD* und *B'C'D'* etc. gleichen Flächeninhalt haben.

Dass ähnlich gleiche Figuren dieser Bedingung entsprechen, ergiebt sich nach 1) von selbst. Dass es aber auch eine so definirte Gleichheit zwischen unähnlichen Figuren giebt, wird sich in der Folge erweisen; desgleichen, dass je zwei Grade der einen Figur sich in Punkten schneiden, welche ein gleiches System bilden mit dem aus den Durchschnitten der entsprechenden Graden hervorgegangenen in der andern Figur etc. Nicht minder wird sich ergeben, dass sowie die Aehnlichgleichheit als specieller Fall der Aehnlichkeit aufgefasst werden kann, ebenso auch die blose Gleichheit als ein besonderer Fall einer anderen allgemeineren Verwandtschaft sich ansehen lässt. Bei Systemen von Punkten, die in graden Linien liegen, fällt die Gleichheit mit der Aehnlichgleichheit zusammen, oder kann keine neue Verwandtschaft darstellen, weil die Bedingung derselben, nämlich die Uebereinstimmung der Figuren hinsichtlich des Flächeninhalts, nicht mehr vorhanden ist.

Ausser den metrischen Verhältnissen zwischen Figuren, die in einer der angegebenen Verwandtschaft stehen, sind noch diejenigen Beziehungen zu bemerken, welche aus besondern Lagen der Figuren, je nachdem sie in einer Graden oder in einer Ebene liegen, hervorgehen. Die dahin gehörigen Untersuchungen, welche bezüglich ähnlichgleicher und ähnlicher Figuren*) in der gewöhnlichen Elementargeometrie erst in neuerer Zeit etwas mehr berücksichtigt werden, treten für die allgemeineren Verwandtschaften in viel entschiedenerem Interesse hervor und decken den inneren Zusammenhang gewisser Gruppen von Sätzen auf, der weniger leicht auf anderem Wege zu ermitteln ist.

In dem Folgenden sollen nun die genannten sowie noch einige allgemeinere Verwandtschaften an gradlinigen und ebenen Gebilden dergestalt erörtert werden, dass von der allgemeinsten derselben, der Collineation, der Ausgang genommen und dann durch Specialisirung gewisser Verhältnisse und Bedingungen das Wesen

*) Man vergl. eine dem Osterprogramm 1852 der Kreutzschule zu Dresden beigegebene Abhandlung von Dr. R. Baltzer, auch abgedruckt in Crelle's Journal Bd. 52. S. 142, in welcher die angezogenen Verhältnisse im Geiste der neueren Geometrie elementar gefasst und hinreichend vollständig erörtert sind.

und der Zusammenhang der übrigen Verwandtschaften nach ihren hauptsächlichsten und wichtigsten metrischen wie Positionsverhältnissen in Betracht gezogen wird.

§. 134.

Erklärungen. Wie bereits in einer Anmerkung zu §. 36 vorläufig bemerkt worden ist, heissen zwei auf zwei oder einer Graden liegende Reihen von Punkten, oder kürzer zwei gradlinige Punktreihen collinear (nach Steiner: projectivisch, nach Chasles: homographisch), wenn jedes Doppelverhältniss von irgend vier Punkten der einen Reihe dem Doppelverhältniss der entsprechenden vier Punkte der andern Reihe gleich ist. Haben dabei die auf zwei Graden liegenden Punktreihen eine solche Lage, dass der Durchschnittspunkt der Graden als jeder Reihe angehörig ein selbstentsprechender ist, oder, was dasselbe bedeutet (§. 36, 1 und 2), dass die Verbindungslinien entsprechender Punkte durch einen und denselben Punkt gehen, so heissen die collinearen Systeme noch perspectivisch oder collinear liegend (homolog). Desgleichen werden zwei Strahlbüschel collinear (projectivisch, homographisch) genannt, wenn das Doppelverhältniss von irgend vier Strahlen des einen Büschels dem Doppelverhältnisse der entsprechenden Strahlen des andern gleich ist. Die collinearen Büschel heissen ausserdem noch perspectivisch oder collinear liegend (homolog), wenn der Verbindungsstrahl beider Mittelpunkte als beiden Büscheln angehörig ein selbstentsprechender ist, oder mit andern Worten (§. 36, 3 u. 4), wenn die Durchschnittspunkte entsprechender Strahlen eine gradlinige Punktreihe bilden.

In gleicher Weise werden zwei Systeme von Punkten und Graden in einer Ebene collinear genannt, wenn jede vier in einer Graden liegende Punkte sowie auch vier sich in einem Punkte schneidende Grade dasselbe Doppelverhältniss geben, wie die vier entsprechenden ebenfalls in einer Graden liegenden Punkte sowie die vier entsprechenden und auch in einem Punkte sich schneidenden Graden des andern Systemes.

Haben beide Figuren dabei eine solche Lage, dass die Verbindungsgraden entsprechender Punkte durch Einen Punkt gehen oder die Durchschnittspunkte entsprechender Graden eine grad-

linige Punktreihe bilden, so heissen die Figuren collinear liegend oder perspectivisch (nach Chasles homolog).

§. 135.

Die Sätze des §. 36, welche als Fundamentalsätze für die die Collineation gradliniger Systeme von Punkten und ebener Strahlbüschel anzusehen sind, lassen sich nun auch in folgender Fassung wiedergeben:

1) Gehen die Verbindungsgraden je zweier entsprechenden Punkte von zwei gradlinigen Punktreihen durch einen und denselben Punkt, so sind die Punktreihen collinear und perspectivisch (haben perspectivische Lage), dabei ist der Durchschnittspunkt der Graden, auf denen die Reihen liegen, ein selbstentsprechender oder ein Doppelpunkt; und umgekehrt: die Verbindungsgraden je zweier entsprechenden Punkte von zwei collinearen und perspectivischen Punktreihen gehen durch einen und denselben Punkt; die perspectivische Lage der collinearen Punktreihen findet jederzeit statt, wenn der Durchschnittspunkt der Graden, worauf sie liegen, ein selbstentsprechender oder ein Doppelpunkt ist.

2) Liegen die Durchschnittspunkte je zweier entsprechenden Strahlen von zwei ebenen Strahlbüscheln in einer und derselben Graden, so sind die Strahlbüschel collinear und perspectivisch; dabei ist der Verbindungsstrahl der Mittelpunkte beider Büschel ein selbstentsprechender oder ein Doppelstrahl; und umgekehrt: Die Durchschnittspunkte je zweier entsprechender Strahlen von zwei collinearen und perspectivischen Strahlbüscheln liegen in ein und derselben Graden; die perspectivische Lage der collinearen Büschel findet jederzeit statt, wenn der Verbindungsstrahl der Mittelpunkte beider Büschel ein selbstentsprechender oder ein Doppelstrahl ist.

An diese schliessen sich als unmittelbare Folgerungen noch nachstehende Sätze:

3) Liegen auf zwei Graden s und s' die collinearen Punktreihen $A, B, C, \ldots A', B', C' \ldots$ und wählt man auf der Verbindungsgraden AA' zweier entsprechender Punkte zwei beliebige Punkte S und S' als Mittelpunkte zweier Strahlbüschel SA, SB, SC $\ldots$, $S'A'$ $S'B'$, $S\,C'$ $\ldots$, so liegen die Durchschnittspunkte der entsprechender Graden SB und $S'B'$, SC und $S'C' \ldots$ in einer und derselben Graden. Denn nach Nr. 2 sind die collinearen Strahl-

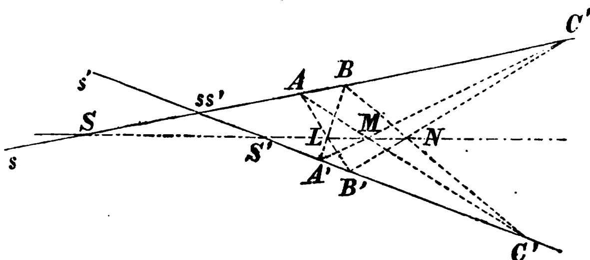
büschel mit den Mittelpunkten S und S' perspectivisch, folglich etc.

4) Sind S und S' die Mittelpunkte zweier collinearen Strahlbüschel $a, b, c, \ldots a', b', c' \ldots$ und legt man durch den Durchschnittspunkt A zweier entsprechender Strahlen a und a' zwei Transversalen s und s', welche die beiden Büschel in zwei gradlinigen Punktreihen $A, B, C, \ldots A, B' C' \ldots$ schneiden: so gehen die Verbindungsgraden $BB', CC' \ldots$ entsprechender Punkte von s und s' durch einen und denselben Punkt. Denn die collinearen Punktreihen $A, B, C \ldots A, B', C' \ldots$ sind nach Nr. 1 perspectivisch, folglich u. s. w.

§. 136.

Lehrsatz. Sind $A, B, C \ldots, A', B', C' \ldots$ (Fig. 55) zwei auf zwei Graden s und s' liegende collineare Punktreihen, die aber im Allgemeinen nicht perspectivisch liegen, so schneiden sich je zwei

Fig. 55.



Grade wie AB' und $A'B$, oder AC' und $A'C$ oder BC' und $B'C \ldots$, welche von zwei beliebigen Punkten der ersteren Graden nach den in verwechselter Ordnung genommenen zwei Punkten der anderen Graden gezogen sind, in Punkten $L, M, N \ldots$, die auf einer und derselben Graden liegen.

Denn bezeichnet ss' den Durchschnittspunkt der beiden Graden s und s' und ist S der zu ss' entsprechende Punkt auf s, insofern ss' ein Punkt von s' ist, ferner S' der dem ss' entsprechende Punkt, insofern ss' der s angehört, so hat man nur zu beweisen, dass der Durchschnittspunkt L zweier Graden wie AB' und $A'B$ auf der SS' liegt. Letzteres folgt aber daraus, dass die Punkte A, B, ss', S den Punkten A', B', S', ss collinear sind, folglich auch das von A ausgehende Büschel AA', AB', AS', Ass dem von A' ausgehenden

Büschel $A'A$, $A'B$, $A'ss'$, $A'S$ collinear ist. Weil aber diese Büschel einen gemeinschaftlichen Strahl AA' haben, so sind sie perspectivisch, folglich schneiden sich nach §. 135, 2 die drei andern Paare entsprechender Graden AB' und $A'B$, AS' und $A'ss'$, Ass' und $A'S$ in Punkten L, S', S, welche in einer Graden liegen. Ebenso wird bewiesen, dass auch die Durchschnittspunkte M, N... in der SS' liegen.

§. 137.

Zusätze. 1) Da zu drei Punkten A, B, C einer Graden stets drei beliebige A', B', C' einer andern Graden als collinear entsprechende angenommen werden können, so lässt sich der vorhergehende Satz auch wie folgt ausdrücken:

Werden auf zwei Graden zwei Reihen von drei paarweise einander entsprechenden Punkten A, B, C und A', B', C' beliebig angenommen, so schneiden sich die Diagonalen AB' und $A'B$, AC' und $A'C$, BC' und $B'C$ in drei in grader Linie liegenden Punkten L, M, N.

Da man ferner $AB'CA'BC'A$ als ein zwischen zwei Grade s und s' beschriebenes (einfaches) Sechseck oder als ein solches betrachten kann, dessen erste, dritte und fünfte Ecke, sowie die zweite, vierte und sechste auf je einer Graden liegen, so besagt derselbe Satz:

Die Durchschnittpunkte der Gegenseiten eines zwischen zwei Grade beschriebenen Sechsecks liegen in einer und derselben Graden. (Satz des Pappus: *Papp. Collect. VII. Lem. XIII.*)

Denkt man sich noch AA', BB', CC' gezogen, so kann man die Figur als ein Viereck $AA'C'C$ betrachten, das durch eine beliebige Grade BB' in zwei andere Vierecke $AA'B'B$ und $BB'C'C$ getheilt ist, und für welche die Graden AC' und $A'C$, AB' und $A'B$, BC' und $B'C$ die Diagonalen sind, also:

Theilt man ein gewöhnliches Viereck $AA'C'C$ durch eine beliebige Transversale BB' in zwei andere Vierecke $AA'B'B$ und $BB'C'C$, so liegen die Durchschnittspunkte L, N, M der Diagonalen der beiden Theilvierecke und des ganzen Vierecks in Einer Graden.

2) Liegen die Punkte A, B, C, und A', B', C' perspectivisch, d. h. gehen die Graden AA', BB', CC' durch einen und denselben

Punkt P, so ist auch der Durchschnittspunkt ss' ein selbstentsprechender (§. 135, 1) oder die Punkte S und S' fallen mit ss' zusammen und die Grade LMN geht durch ss'. Alsdann werden die Graden, AA', BB', CC' durch den Punkt P und die Grade LMN harmonisch getheilt, oder die Graden s und s' sowie $ss'P$ und LMN sind Strahlenpaare eines harmonischen Büschels, wie sich nach §. 60 oder 100, 2. Zusatz, sofort aus der Betrachtung der Vierecke $AB'A'B$, $BC'B'C$ ergiebt, von denen je zwei Gegenseiten sich in ss', L und N und je zwei Diagonalen in P schneiden.

§. 138.

Lehrsatz. Sind $a, b, c \ldots a', b', c' \ldots$ die Strahlen zweier collinearer Büschel S und S', die im Allgemeinen nicht perspectivisch liegen, so gehen die Verbindungsgraden je zweier Durchschnittspunkte wie $a \cdot b'$ und $a' \cdot b$ oder l, $a \cdot c'$ und $a'.c$ oder m, $b \cdot c'$ und $b' \cdot c$ oder $n \ldots$ durch einen und denselben Punkt, nämlich durch den Punkt $s \cdot s'$ der beiden Strahlen s und s', wovon die erste in dem ersten Büschel dem Strahle SS' als einem dem zweiten angehörigen, und die zweite im zweiten Büchel derselben SS' als einem dem ersten Büschel angehörigen Strahle entspricht.

Denn nach den Voraussetzungen des Lehrsatzes ist $sin\,(a\,b\,SS'\,s) = sin\,(a'\,b'\,s'\,SS')$, mithin nach den Bezeichnungen von §. 37

$$^{a'}(a\,b\,SS'\,s) = {}^{a}(a'\,b'\,s'\,SS')\cdot$$

Die beiden somit angedeuteten collinearen Punktreihen sind aber wegen des gemeinsamen oder sich selbst entsprechenden Punktes $a \cdot a'$ auch perspectivisch, folglich gehen die Verbindungsgraden entsprechender Punkte $a' \cdot b$ und $a \cdot b'$, $a' \cdot SS'$ oder S' und $a \cdot s'$, $a' \cdot s$ und $a\,SS'$ oder S durch einen und denselben Punkt (§. 135), d. h. weil die Verbindungsgrade von S' und $a \cdot s'$ nur s' und die von $a' \cdot s$ und S nur s sein kann, die Verbindungsgrade von $a' \cdot b$ und $a \cdot b'$ oder l geht durch ss'. Ebenso wird bewiesen, dass auch die durch $a \cdot c'$ und $a'.c$, $b \cdot c'$ und $b' \cdot c$ u. s. w. gelegten Graden m, n u. s. w. sich in $s \cdot s'$ treffen.

§. 139.

Zusätze und Folgerungen. 1) Da zu drei Graden a, b, c eines Büschels stets drei beliebige a', b', c' eines andern Büschels

als collinear entsprechende angenommen werden können, so kann man vorstehendem Satze auch folgende Fassung geben:

Werden zu drei durch einen Punkt S gehenden Graden a, b, c drei beliebige andere ebenfalls durch einen Punkt S' gehende Grade a', b', c' entsprechend angenommen, so schneiden sich auch die Verbindungsgraden l, m, n der Diagonalpunkte $a \cdot b'$ und $a' \cdot b$, $a \cdot c'$ und $a' \cdot c$, $b \cdot c'$ und $b' \cdot c$ in einem und demselben Punkte.

Da ferner $ab'ca'bc'a$ ein von zwei Punkten aus beschriebenes (einfaches) Sechsseit, (dessen Ecken die Durchschnittspunkte einer jeden Graden mit der in der genannten Aufeinanderfolgen zunächst vorhergehenden — oder folgenden Graden sind) oder ein solches bilden, dessen erste, dritte und fünfte Seite ebenso wie die zweite, vierte und sechste durch je einen Punkt gehen, so hat man auch folgenden Satz erwiesen:

Die Verbindungsgraden der Gegenecken eines von zwei Punkten aus beschriebenen Sechsseits gehen durch einen und denselben Punkt.

2) Liegen die Strahlbüschel S und S' perspectivisch, d. h. sind die Durchschnittspunkte $a \cdot a'$, $b \cdot b'$, $c \cdot c' \ldots$ entsprechender Strahlen auf Einer Graden p enthalten; so ist auch der Strahl SS' ein selbstentsprechender, oder die Strahlen s, s' fallen mit SS' zusammen und der Durchschnittspunkt von l, m, n muss in SS' liegen. Alsdann sind die Punkte S und S' sowie $p \cdot SS'$ und $l \cdot m \cdot n$ harmonische Punktepaare, d. h. $(S, S', p \cdot SS', l \cdot m \cdot n) = -1$, wie sich nach §. 60 oder 100 Zusatz 1) aus der Betrachtung des Vierseits $a \cdot b' \cdot a' \cdot b$ (oder $b \cdot c' \cdot b' \cdot c$) ergiebt, von dem je zwei Gegenecken $a \cdot b$ oder S und $a' \cdot b'$ oder S', $a \cdot b'$ und $a' \cdot b'$, $a \cdot a'$ und $b \cdot b'$, ferner die harmonisch sich schneidenden Diagonalen SS', l und p sind.

§. 140.

Aufgaben. Die vorhergehenden Sätze geben die Lösung und Begründung der Aufgaben: 1) zu einem gegebenen System von Punkten einer Graden ein anderes demselben collineares in einer andern Graden zu construiren, wozu drei Punkte als entsprechende dreien Punkten der erstern Graden bezeichnet sind; und 2) zu einem Strahlbüschel ein anderes demselben collineares zu construiren, wozu noch drei durch einen Punkt gehende Grade als entsprechende Strahlen des ersteren Büschels bezeichnet sind. Für beide Auf-

gaben sind die Fälle zu unterscheiden, ob von den drei gegebenen Punkten (Graden) der zweiten Graden (des zweiten Büschels) einer mit seinem entsprechenden Punkte (eine mit ihrer entsprechenden Graden) der ersten Graden (des ersten Büschels) in dem Durchschnittspunkte beider Graden (in der Verbindungslinie der Mittelpunkte beider Büschel) zusammenfällt, oder nicht, d. h. ob die gegebenen Systeme von Punkten (Graden) zugleich perspectivisch liegen oder nicht.

I. 1) Sind im ersteren Falle A, B, $C, \dots X$ die gegebenen Punkte der ersteren Graden s, und A, B', C', die gegebenen Punkte der zweiten Graden s', wobei also der Punkt $s \cdot s'$ mit A identisch ist, und soll zu einem Punkte X von s der entsprechende X' auf s' bestimmt werden, so dass $(ABCX) = (AB'C'X')$ ist: so ziehe man einfach die Verbindungsgraden BB', CC', welche sich in P schneiden mögen, und dann die Grade PX, welche die s' im Punkte X' schneidet. (§. 36, 1. und §. 136.)

2) Desgleichen sind im ersteren Falle $a, b, c' \dots x$ die gegebenen Graden des ersten Büschels S; a, b', c' die des zweiten S', wobei die Grade SS' mit a zusammenfällt und soll zu einer Graden x von S die entsprechende x' in S' bestimmt werden, so dass $\sin(abcx) = \sin(ab'c'x')$ ist: so ziehe man durch die Punkte $b \cdot b'$ und $c \cdot c'$ die Grade p und nach dem Durchschnittspunkte $p \cdot x$ von S' aus eine Grade, welche die geforderte x' sein wird (§. 36, 2 und §. 135).

II. 1) Fällt andernfalls keiner der Punkte A', B', C' der zweiten Graden s' mit seinem entsprechenden auf der ersteren Graden s zusammen, so kann man durch einen der Punkte von s' z. B. durch A' eine beliebige Grade s_1 legen und auf derselben von A' aus die Abschnitte $A'B_1$, $A'C_1 \dots A'X_1$ gleich und einstimmig resp. mit den Abschnitten $AB, AC, \dots AX$ der Graden s abtragen, hierauf die $B'B_1$, $C'C_1$ ziehen und durch deren Durchschnittspunkt P und durch X_1 eine Grade legen, welche die s' in dem Punkte X' trifft.

2) Fällt ebenso keine der Graden a', b', c' von S' mit ihrer entsprechenden in S' zusammen, so lege man von einem beliebigen Punkte S_1 einer dieser Graden, z. B. der a' an dieselbe die Winkel $a' {}^\wedge b_1$, $a' {}^\wedge c_1 \dots a' {}^\wedge x_1$, welche gleich und einstimmig resp. mit den Winkeln $a {}^\wedge b$, $a {}^\wedge c \dots a {}^\wedge x$ von S sind, ziehe durch die Durchschnittspunkte der entsprechenden Strahlen $b_1 \cdot b'$, $c_1 \cdot c'$ eine Grade p, und

durch deren Durchschnittspunkt $p \cdot x_1$ mit x_1 nach den Mittelpunkt S' eine Grade, welche die geforderte x' ist.

Die beiden letzten Constructionen gründen sich ersichtlicher Weise auf die vorhergehenden sowie auf den für sich evidenten Satz, dass wenn ein System von Punkten oder Graden mit einem zweiten collinear liegt, und das zweite mit einem dritten völlig gleich (identisch) ist, das erste auch dem dritten collinear ist.

III. Dieses zu Hilfe genommene dritte System in perspectivischer Lage kann auf noch andere Weise vertreten werden, wie folgende allgemeine Lösungen derselben Aufgaben zeigen werden.

1) Sind die Punkte A, B, C, ... X der Graden s sowie A', B', C' der Graden s' gegeben und soll zum Punkte X von s der entsprechende X' auf s' bestimmt werden, so ziehe man durch eins der Paare zugehöriger Punkte z. B. durch A und A' die Grade a, nehme auf derselben zwei beliebige Punkte P und P', ziehe von P aus nach B, C, X die Strahlen b, c, x, sowie von P' nach B', C' die Strahlen b', c' und lege durch die Durchschnitte $b \cdot b'$ oder B_1, $c \cdot c'$ oder C_1 entsprechender Strahlen die Grade s_1, welche x in dem Punkte X_1 treffen möge. Eine von P' nach X_1 gezogene Grade x' wird dann die s' in dem gesuchten Punkte X' schneiden.

Denn wegen der perspectivischen Lage der Büschel P und P' (§. 135) ist $sin\,(a, b, c, x) = sin\,(a, b', c', x')$, mithin $(ABCX) = (A'B'C'X')$.

Zusätze. Man kann für die Punkte X und X' gewisse singuläre Lagenverhältnisse voraussetzen, welche z. Th. auch auf entsprechende metrische Verhältnisse hinführen, wie sich in der Folge ergeben wird.

a) Sei X der Durchschnittspunkt ss' der beiden gegebenen Graden, so findet man den diesem entsprechenden Punkt S (S') auf der ersten (zweiten) Graden s (s'), insoweit ss' als der zweiten (ersten) Graden s' (s) angehörig betrachtet wird, wenn man von P' (P) nach $s \cdot s'$ die Grade $P's \cdot s'$ ($Ps \cdot s'$) zieht, welche die s' in dem Punkte S_1 (S_1') schneidet, und von da aus nach P (P') den Strahl PS_1 ($P'S'_1$) legt, der die s (s') in dem gesuchten Punkte S (S') treffen muss.

b) Soll X (X') der unendlich entfernte Punkt auf der Graden s (s') sein, zu welchen der entsprechende J' (J) auf der Graden s' (s) zu bestimmen ist, so ziehe man von P (P') zur s (s') die Parallele u (u'), welche die Grade s_1 in dem Punkte J_1 (J_1') schneidet und sodann

von $P'(P)$ den Strahl $P'J_1(PJ_1')$, der die $s'(s)$ in dem gesuchten Punkte $J'(J)$ treffen muss.

c) Die vorstehenden Constructionen des Punktes X' sowohl im Allgemeinen wie in den unter a) und b) bemerkten besondern Fällen vereinfachen sich etwas, wenn man für den Punkt P den Durchschnittspunkt A' der Graden a und s' und für P' den Punkt $a \cdot s$ wählt. (Vergl. §. 136 u. Fig. 55.)

2) Sind die Strahlen $a, b, c, \ldots x$ des Büschels S sowie a', b', c' des Büschels S' gegeben und soll zum Strahle x von S der entsprechende x' von S' bestimmt werden, so lege man durch den Durchschnittspunkt eines der Paare zugehöriger Strahlen z. B. durch $a \cdot a'$ oder A, zwei beliebige Grade p und p', von denen die erstere die Strahlen $b, c, \ldots x$ in den Punkten $B, C, \ldots X$, die andere p' die Strahlen b', c' in B', C' treffe. Durch die entsprechenden Punkte B und B', C und C' lege man zwei Grade, die sich in S_1 schneiden und ziehe die Grade S_1X, welche die p' in X' treffen möge. Eine von X' nach S' gezogene Grade ist dann der geforderte Strahl x'.

Denn wegen der perspectivischen Lage der auf p und p' liegenden Punktreihen (§. 135) ist $(ABCX) = (AB'C'X')$, mithin $\sin(abcx) = \sin(a'b'c'x')$.

Zusätze. Für die Strahlen x und x' kann man ebenfalls ein besonderes Lagenverhältniss voraussetzen:

a) Ist nämlich x die Verbindungsgrade SS' der beiden Mittelpunkte, so findet man den dieser entsprechenden Strahl s (s') des ersten (zweiten) Büschels S (S'), insoweit x oder SS' als dem zweiten (ersten) Büschel S' (S) angehörig betrachtet wird: wenn man den Durchschnittspunkt der SS' und der Graden p' (p') mit S_1 durch die Grade s_1 (s_1') verbindet, welche die p (p') in dem Punkte $p \cdot s_1$ $(p' \cdot s_1')$ trifft, nach dem man von S (S') den geforderten Strahl s (s') zu ziehen hat.

b) Da dem unendlich fernen Punkte einer Graden kein besonderer Strahl des Strahlbüschels zur Seite gestellt werden kann, so giebt es hier zu 1, b. keinen direct analogen Satz; wenn auch die einander entsprechenden rechtwinkligen Strahlenpaare beider Büschel ähnliche metrische Beziehungen abgeben werden. (Vergl. §. 40. 2 a.)

c) Die Construction des Strahles x' im Allgemeinen wie in dem besondern Falle vereinfacht sich etwas, wenn man für die Grade p

den Strahl a' des zweiten Büschels S' und für p' den Strahl a des ersten S wählt.

Metrische Verhältnisse und Gleichungen für die Collineation zweier Punktreihen oder Strahlbüschel.

§. 141.

Sind A, B, C drei Punkte einer Graden s, welche den Punkten A', B', C' einer andern s' entsprechend gesetzt werden, so ist der einem auf s beliebig angenommenen Punkte X entsprechende X' auf s' durch die Relation

$$(ABCX) = (A'B'C'X')$$

bestimmt. Löst man die symbolischen Ausdrücke auf, so ergiebt sich auch

$$\frac{AX}{XB} = \frac{A'X'}{X'B'}\left(\frac{AC}{CB} : \frac{A'C'}{C'B'}\right)$$

oder, weil $\frac{AC}{CB} : \frac{A'C'}{C'B'}$, aus gegebenen Abschnitten zusammen gesetzt, als eine Constante anzusehen ist, deren Werth $= \lambda$ gesetzt werden möge,

$$\text{I.} \qquad \frac{AX}{XB} = \lambda \frac{A'X'}{X'B'}, \quad \frac{AX}{XB} : \frac{A'X'}{X'B'} = \lambda,$$

d. h. Sind die Punktreihen zweier Graden (die auch in Eine zusammenfallen können) einander collinear entsprechend, so ist das Verhältniss zwischen dem Verhältnisse der Abstände eines jeden Punktes (X) von zwei festen Punkten (A, B) der einen Graden und dem Verhältnisse der Abstände des entsprechenden Punktes (X') von den festen Punkten (A', B') der andern Graden ein constantes (λ).

Umgekehrt kann man von der Gleichung I. auf die Collineation der beiden Punktreihen schliessen, oder: Theilen die veränderlichen entsprechenden Punkte X, X' die Abschnitte AB, $A'B'$ zweier Graden s und s' so, dass die Verhältnisse $\frac{AX}{XB}$, $\frac{A'X'}{X'B'}$ der Theile eines jeden Abschnittes in einem constanten Verhältnisse stehen, so bilden die Punkte auf den beiden Graden zwei collineare Punktreihen.

Denn sind C, D irgend zwei besondere Lagen des veränder-

lichen Punktes X, ebenso C', D' von X', so hat man nach der Voraussetzung

$$\frac{AC}{CB} = \lambda \frac{A'C'}{C'B'} \text{ und } \frac{AD}{DB} = \lambda \frac{A'D'}{D'B'}, \text{ mithin}$$

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = \frac{A'C'}{C'B'} : \frac{A'D'}{D'B'}$$

oder

$$(ABCD) = (A'B'C'D')$$

d. h. die Punkte A', B', C', D' sind den Punkten A, B, C, D collinear.

§. 142.

Geometrische Bedeutung und Construction der Constante λ. Nimmt man in der Gleichung I. des vorhergehenden §. den Punkt X' als den unendlich fernen der Graden s' an, und bezeichnet den entsprechenden auf s mit J, so hat man, wegen $A'X' : X'B' = -1$

$$\frac{AJ}{JB} = -\lambda, \text{ oder } \frac{AJ}{BJ} = \lambda.$$

Desgleichen giebt dieselbe Gleichung I., wenn X der unendlich ferne Punkt der Graden s und J' der ihm entsprechende auf s' ist, $AX : XB = -1$ und

$$\frac{A'J'}{J'B'} = -\frac{1}{\lambda}, \text{ oder } \frac{B'J'}{A'J'} = \lambda$$

Somit lässt sich die Gleichung I. auch schreiben

$$\text{Ib.} \qquad \frac{AX}{XB} : \frac{A'X'}{X'B'} = \frac{AJ}{BJ} \left(= \frac{B'J'}{A'J'}\right);$$

Da der Punkt J von A und B unabhängig, den Werth des Verhältnisses $AJ : BJ = \lambda$ bestimmt, so kann man auch für jeden gegebenen Werth von λ den Punkt J gegen A und B seiner Lage bestimmen. Soll $\lambda = -1$ sein, so muss J den Abschnitt AB halbiren, desgleichen auch J' den Abschnitt $A'B'$. Setzt man dagegen für λ den Werth $= +1$ voraus, so kann nach dem Verhältnisse $AJ : BJ = 1$ der Punkt J nur der unendlich ferne der Graden AB sein, und da J derjenige Punkt der ersten Graden ist, welcher dem unendlich fernen der zweiten Graden entspricht, so ist bei collinearer Beziehung der Punkte zweier Graden mit der Annahme von $\lambda = 1$ der besondere Umstand verknüpft, dass dem unendlich fernen Punkte der einen Graden der unend-

lich ferne Punkt der andern entspricht. Die Gleichung (I) vereinfacht sich für diesen Fall auf

$$\frac{AX}{XB} = \frac{A'X'}{X'B'};$$

eine Beziehung, welche ausdrückt, dass die Punkt X, X' die Abschnitte AB, $A'B'$ ähnlich oder proportional theilen. Daher:

Die collineare Beziehung zweier gradliniger Punktreihen geht in die einer geometrischen Proportion über, wenn dem unendlich fernen Punkte der einen Reihe auch der unendlich ferne der andern entspricht.

§. 143.

Anderer Ausdruck für die Collineation der Punkte zweier Graden. Die collineare Beziehung

$$(ABCX) = (A'B'C'X')$$

der festen Punkte A, B, C, und A', B', C' zweier Graden s und s' sowie der veränderlichen Punkte X und X' lässt sich auch noch auf andere Weise ausdrücken. Ist nämlich A' der unendlich ferne Punkt der zweiten Graden, B der unendlich ferne Punkt der ersten und bezeichnet man wie vorher mit J und J' die den Punkten A' und B entsprechenden Punkte auf der ersten und zweiten Graden, so vereinfachen sich obige Doppelverhältnisse auf

$$JX.J'X' = JC.J'C'$$

oder, weil das Product $JC.J'C'$ aus Abschnitten zwischen festen Punkten besteht, also einer Constante μ gleich gesetzt werden kann:

$$\text{II.} \qquad JX.J'X' = \mu,$$

d. h. Werden die Punkte zweier Graden zu einander in collineare Beziehung gebracht, so ist das Product ($JX.J'X'$) aus den Abständen zweier entsprechender Punkte (X, X') von zwei festen Punkten (J, J') die den unendlich fernen Punkten der beiden Graden entsprechen, von unveränderlicher Grösse.

Der Satz gilt auch umgekehrt; oder werden auf zwei Graden (s und s') je zwei entsprechende Punkte (X und X') so angenommen, dass das Product ($JX.J'X'$) ihrer Abstände von zwei festen Punkten (J und J') constant bleibt

so bilden die dergestalt bestimmten Punkte X und X' zwei collineare Punktreihen auf den Graden (s und s').

Denn sind X_1 und X_2 zwei Punkte der ersten Graden, X_1' und X_2' die entsprechenden der zweiten, so hat man

$$JX_1 . J'X_1' = JX_2 . J'X_2'$$

oder

$$JX_1 : JX_2 = J'X_2' : J'X_1'.$$

Bedeuten nun U und U' die unendlich fernen Punkte der Graden s und s', so hat man auch, wegen $X_1U : X_2U = X_1'U' : X_2U' = 1$,

$$\frac{JX_1}{X_1U} : \frac{JX_2}{X_2U} = \frac{J'X_2'}{X_2'U'} : \frac{J'X_1'}{X_1'U'},$$

d. i.

$$(JUX_1X_2) = (J'U'X_2'X_1'),$$

oder

$$(JUX_1X_2) = (U'J'X_1'X_2'),$$

mithin sind die Punkte J, U, X_1', X_2' der einen Graden den Punkten U', J', X_1', X_2' der andern collinear entsprechend, und dabei J und J' die Punkte der ersten und zweiten Graden, welche den unendlich fernen U' und U der zweiten und ersten Graden zugeordnet sind.

§. 144.

Dritter Ausdruck für die Collineation gradliniger Punktreihen. Aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse

$$(ABXC) = (A'B'X'C')$$

zwischen den auf beiden Graden entsprechenden Punkten folgt auch nach §. 27, III. die Beziehung

$$(ABXC) + (A'X'B'C') = 1$$

oder, wenn man die Ausdrücke auflösst und die Verhältnisse zwischen den festen Abschnitten

$$\frac{BC}{AC} = \nu, \qquad \frac{B'A'}{C'A'} = \pi$$

setzt,

III. $$\nu . \frac{AX}{BX} + \pi \frac{C'X'}{B'X'} = 1;$$

eine Gleichung, welche ebenfalls die collineare Beziehung der veränderlichen Punkte X, X' auf den beiden Graden s und s' ausdrückt und für welche die Punkte A, B, C' an kein besonderes Verhältniss

geknüpft sind, während man B und B' als einander entsprechende Punkte anzusehen hat.

Man kann daher den drei Punkten A, B, C' besondere Lagen zuweisen, wodurch die Coefficienten ν und π entsprechender Weise besondere Werthe bekommen. Namentlich kann man einen oder zwei dieser Punkte als die unendlich fernen der Graden s oder s' annehmen und bezeichnet man den jedesmal entsprechenden in der andern Graden s' oder s wie oben mit J' oder J, so erhält man aus III. oder aus $(ABXC) + (A'X'B'C') = 1$,

a) wenn A als der unendlich ferne von s angenommen, also der entsprechende A' auf s' mit J' bezeichnet wird:

$$\frac{BC}{BX} + \frac{B'J'}{C'J'} \cdot \frac{C'X'}{B'X'} = 1, \text{ oder}$$

III a. $$\frac{\nu'}{BX} + \pi' \frac{C'X'}{B'X'} = 1;$$

b) wenn A und B' die unendlich fernen Punkte auf s und s' sind, ihre entsprechenden A' und B auf s' und s mit J' und J bezeichnet werden:

$$\frac{JC}{JX} + \frac{C'X'}{C'J'} = 1, \text{ oder}$$

III b. $$\frac{\nu''}{JX} + \pi'' C'X' = 1;$$

c) wenn A und C' die unendlich fernen Punkte der Graden s und s' sind und deren entsprechende A' und C auf s' und s mit J' und J bezeichnet werden:

$$\frac{BJ}{BX} + \frac{B'J'}{B'X'} = 1, \text{ oder}$$

III c. $$\frac{\nu'''}{BX} + \frac{\pi'''}{B'X'} = 1.$$

Die letzten beiden Gleichungen (III c.) für die collineare Beziehung der veränderlichen Punkte X und X' sind wegen ihrer Symetrie und der einfachen geometrischen Bedeutung der Coefficienten ν''' und π''' besonders bemerkenswerth. Sind daher A, A' zwei andere entsprechende Punkte der collinearen Punktreihen, auf beiden Graden, so hat man ausser der Gleichung

$$\frac{BJ}{BX}+\frac{B'J'}{B'X'}=1,$$

noch die beiden

$$\frac{BJ}{BA}+\frac{B'J'}{B'A'}=1,$$

und

$$\frac{AJ}{AX}+\frac{A'J'}{A'X'}=1,$$

von denen je zwei Gleichungen die dritte involviren.

§. 145.

Zusätze. 1) Die Gleichung (III c.) lässt eine bemerkenswerthe Eigenschaft der Punkte zweier Graden, welche in collinearer Beziehung zu einander stehen, erkennen. Man wird nämlich auf der einen Graden s (s') von einem festen Punkte B, (B') aus einen Abschnitt BX, ($B'X'$) bestimmen können, der seinem entsprechenden $B'X'$, (BX) gleich und zugleich demselben entweder gleichsinnig oder entgegengesetzt ist. Denn setzt man in der Gleichung (III c.) $BX_1 = B'X_1'$, so erhält man

$$BX_1 = B'X_1' = v''' + \pi''',$$

oder, wenn die Werthe für v''' und π''' wieder eingesetzt werden:

$$BX_1 = B'X_1' = BJ + B'J'.$$

Setzt man dagegen $BX_2 = -B'X_2'$ voraus, so ergiebt sich für diese Abschnitte

$$\begin{aligned} BX_2 = -B'X_2' &= v''' - \pi''' \\ &= BJ - B'J'. \end{aligned}$$

Nimmt man z. B. an, dass der Durchschnittspunkt S beider Graden s und s' ein selbstentsprechender ist, mithin die auf denselben liegenden collinearen Punktreihen zugleich perspectivisch sind, so kann man B und B' mit S zusammenfallen lassen. Ist ferner P der Durchschnittspunkt aller Verbindungsgraden je zweier entsprechender Punkte der Punktreihen (der Projectionspunkt), so findet man die Punkte J und J' auf s und s' einfach dadurch, dass man von P aus zwei Parallelen zu s' und s zieht, welche die s und s' in den Punkten J und J' treffen. Die einander gleichen und gleichgerichteten Abschnitte ergeben sich dann einfach durch

$$SX_1 = SX_1' = SJ + SJ',$$

sowie die entgegengesetzt genommenen Abschnitte durch

$$SX_2 = - SX_2' = SJ - SJ',$$

nachdem man für beide Graden s und s' den positiven Sinn vorher festgesetzt hat, was auch durch Ertheilung bestimmter Vorzeichen den Abschnitten SJ und SJ' geschehen kann. Die Bestimmung der Abschnitte $SX_1 = SX_1'$ oder $SX_2 = - SX_2'$ erhält unter andern in der Aufgabe des Apollonius vom Verhältniss- und Raumschnitt besondere Bedeutung.

2) Sind die Punktreihen auf den beiden Graden s und s' einander ähnlich, entsprechen sich also die beiden unendlich fernen Punkte beider Graden, wofür man die beiden correspondirenden Punkte B, B' annehmen kann, so giebt die Beziehung $(ABXC) + (A'X'B'C') = 1$ die Gleichung

$$\frac{AX}{AC} + \frac{C'X'}{C'A'} = 1, \text{ oder}$$

$$\nu AX + \pi C'X' = 1$$

für die proportionale Theilung der Graden s, s' durch die veränderlichen Punkte X, X'. Diese Gleichung reducirt sich leicht auf die in 142 bemerkte für denselben Fall; denn aus

$$\frac{AX}{AC} + \frac{C'X'}{C'A'} = 1 \text{ oder } \frac{AX}{AC} = 1 + \frac{C'X'}{A'C'}$$

folgt sofort

$$\frac{AX}{AC} = \frac{A'C' + C'X'}{A'C'} = \frac{A'X'}{A'C'}.$$

§. 146.

Vierter Ausdruck für die Collineation gradliniger Punktreihen. Setzt man in der Gleichung (§. 141)

$$\frac{AX}{BX} = k\frac{A'X'}{B'X'} \text{ oder } AX.B'X' = k.BX.A'X',$$

in welcher k irgend eine Constante bezeichnet, $BA + AX$ für BX und $A'B' + B'X'$ für $A'X'$, so erhält man

$$(1-k)AX.B'X' + kB'A'.AX + kAB.B'C' + kAB.A'B' = 0,$$

oder wenn man die constanten Grössen

$$\frac{k}{1-k}B'A', \quad \frac{k}{1-k}AB, \quad \frac{k}{1-k}AB.A'B',$$

resp. mit λ, μ, ν bezeichnet:

IV. $$AX.B'X' + \lambda AX + \mu B'X' + \nu = 0;$$

eine Gleichung, welche ebenfalls die collineare Beziehunng der Punkte X und X' auf den Graden s und s' ausdrückt. Denn auch umgekehrt; nimmt man auf zwei Graden s und s' von zwei festen Punkten A und B' aus zwei veränderliche Abschnitte AX, $B'X'$, welche an die Relation

$$AX.B'X' + \lambda AX + \mu B'X' + \nu = 0$$

gebunden sind, so bilden die Punkte X und X' zwei collineare Punktreihen. Der Nachweis dessen wird zugleich die geometrische Bedeutung der Coefficienten λ, μ, ν geben. Lässt man nämlich

1) den Punkt X mit A also X' mit A' zusammenfallen, so giebt die Gleichung

1) $$\mu B'A' + \nu = 0;$$

2) fällt X mit B, und X' mit B' zusammen, so erhält man

2) $$\lambda.AB + \nu = 0;$$

3) nimmt man X als den unendlich fernen Punkt der Graden s, folglich X' als den Punkt J' an, so ist

3) $$B'J' + \lambda = 0;$$

4) und wenn X' der unendlich ferne Punkt von s', also X der Punkt J ist:

4) $$AJ + \mu = 0.$$

Hieraus ergeben sich für die Coefficienten der Gleichung IV. die Werthe

$$\lambda = J'B'; \quad \mu = JA; \quad \nu = AB.B'J' = B'A'.AJ,$$

und wenn man sie in IV. substituirt, so kommt

$$AX.B'X' + J'B'.AX + JA.B'X' + AB.B'J' = 0$$

oder

$$(JA + AX)\,B'X' + (XA + AB)\,B'J' = 0,$$

d. i. $JX.B'X' + XB.B'J' = 0$ oder $JX:BX = B'J':B'X'$

folglich

$$1 - \frac{JX}{BX} = 1 - \frac{B'J'}{B'X'}, \quad \frac{BX - JX}{BX} + \frac{B'J'}{B'X'} = 1$$

$$\frac{BJ}{BX} + \frac{B'J'}{B'X'} = 1$$

welches die Gleichung (III. c) §. 144 ist.

Die Bestimmungsgleichungen 1) — 4) für die Coefficienten λ, μ, ν geben noch eine Bedingungsgleichung an, nämlich

$$\nu = AB.B'J' = B'A'.AJ \text{ oder}$$

$$\frac{AJ}{AB} = \frac{B'J'}{B'A'}.$$

Bildet man nun aus diesen einfachen Verhältnissen mit Hilfe der unendlich fernen Punkte U und U' der Graden s und s' Doppelverhältnisse, nämlich

$$\frac{JA}{AB}:\frac{JU}{UB}=\frac{J'B'}{B'A'}:\frac{J'U'}{U'A'},$$

d. i.

$$(JBAU)=(J'A'B'U'),$$

oder

$$(AUJB)=(A'J'U'B'),$$

so geben diese die collineare Beziehung der Punkte A, U, J, B und A', J', U', B' zu erkennen. Dasselbe ergiebt sich auch auf dem oben gezeigten Wege. Denn aus

$$\frac{AJ}{AB}=\frac{B'J'}{B'A'} \text{ folgt}$$

$$1-\frac{AJ}{AB}=1-\frac{B'J'}{B'A'} \text{ oder } \frac{AB-AJ}{AB}+\frac{B'J'}{B'A'}=1$$

d. i.

$$\frac{BJ}{BA}+\frac{B'J'}{B'A'}=1$$

oder die zweite der drei zu Ende von §. 144 bemerkten Relationen.

§. 147.

Allgemeinste Gleichung der Collineation zweier gradliniger Punktreihen. Setzt man in der Gleichung (IV) statt der Coefficienten λ, μ, ν die gefundenen Werthe ein und dividirt sie hierauf durch $AJ.B'J'$, so erhält man zunächst

$$\frac{AX}{AJ}\cdot\frac{B'X'}{B'J'}-\frac{AX}{AJ}-\frac{B'X'}{B'J'}+\frac{AB}{AJ}=0,$$

wobei das letzte Glied auch $\frac{B'A'}{B'J'}$ heissen kann. Führt man nun die unendlich fernen Punkte U und U' der Graden s und s' in der Gleichung ein, welche den Punkten J' und J auf s' und s entsprechen, und bildet aus den einfachen Verhältnissen Doppelverhältnisse, so bleibt vorstehende Gleichung unverändert in folgender Form:

$$\left(\frac{AX}{XU}:\frac{AJ}{JU}\right)\cdot\left(\frac{B'X'}{X'U'}:\frac{B'J'}{J'U'}\right)-\frac{AX}{XU}:\frac{AJ}{JU}$$
$$-\frac{B'X'}{X'U'}:\frac{B'J'}{J'U'}+\left(\frac{AB}{BU}:\frac{AJ}{JU}=\frac{B'A'}{A'U'}:\frac{B'J'}{J'U'}\right)=0.$$

Da diese Gleichung nur Doppelverhältnisse enthält, so bleibt sie auch giltig, wenn auch U und U' nicht mehr unendlich ferne, sondern irgend zwei Punkte C und D', mithin J und J' die entsprechenden D und C' bedeuten. Man hat somit für die collineare Beziehung der veränderlichen Punkte X und X' auf den Graden s und s' die allgemeine Gleichung:

$$\text{V.}\quad (ACXD)\,(B'D'X'C') - (ACXD) - (B'D'X'C') + (ACBD) = 0,$$

in deren letztem Gliede man auch $(B'D'A'C') = (A'C'B'D')$ setzen kann. In dieser Gleichung als der allgemeinsten sind die vorhergehenden mit enthalten und können daraus abgeleitet werden, wenn man für gewisse entsprechende Punkte besondere Lagenverhältnisse voraussetzt.

§. 148.

Metrische Relationen für collineare Strahlenbüschel. Nach den in §. 35 u. f. entwickelten Principien und Lehrsätzen müssen bei collinearen Strahlenbüscheln die metrischen Relationen, insoweit sie aus Doppelverhältnissen zusammengesetzt sind, oder dieselben implicite enthalten, ganz den zwischen collinearen Punktreihen gleichgebildet sein und aus jenen abgeleitet werden können, wenn man nur statt der betreffenden gradlinigen Abschnitte die Sinusse der Winkel des Strahlbüschels einsetzt. An die Stelle der unendlich fernen Punkte der Graden s und s', sowie der Punkte J und J' treten hier zwei auf einander rechtwinklig stehende Strahlen der Büschel S, S' ein, durch deren Einführung die Ausdrücke sich ähnlicher Weise vereinfachen, wie es oben für gradlinige Punktreihen sich herausgestellt hat.

1) In ganz ähnlicher Weise wie in §. 141 ergiebt sich aus der Bedingungsgleichung $sin\,(abcx) = sin\,(a'b'c'x')$ für zwei collineare Büschel S und S

$$\text{I.}\qquad \frac{sin\, a^\wedge x}{sin\, b^\wedge x} = \lambda . \frac{sin\, a'^\wedge x'}{sin\, b'^\wedge x'},$$

wobei λ für

$$\frac{sin\, a^\wedge c}{sin\, b^\wedge c} : \frac{sin\, a'^\wedge c'}{sin\, b'^\wedge c'}$$

gesetzt worden ist.

Werden dabei die Graden a, b senkrecht zu einander angenommen, so ist $sin\, a^\wedge x : sin\, b^\wedge x = tg\, a^\wedge x$, und wenn dieselbe Vor-

aussetzung für a' und b' gemacht wird, $\sin a'^{\wedge}x' : \sin b'^{\wedge}x' = tg\, a'^{\wedge}x'$; damit geht die Gleichung I. über in

Ib. $$tg\, a^{\wedge}x = \lambda' . tg\, a'^{\wedge}x',$$

worin $$\lambda' = tg\, a^{\wedge}c : tg\, a'^{\wedge}c'$$

ist.

Diese Gleichung kann auch ausgedrükt werden durch

$$tg\, a^{\wedge}x . tg\, b'^{\wedge}x' = \lambda',$$

d. h. Das Product aus den Tangenten der Winkel, welche irgend zwei entsprechende Strahlen mit den ungleichnamigen Schenkeln der entsprechenden rechten Winkel einschliessen, ist constant. (Vergl. II. in §. 143.)

Der Bedingung (Ib) genügen auch zwei Büschel, deren Winkel paarweise einander gleich sind, und entweder gleichsinnig oder entgegengesetzt gerichtet sind. Ihre Gleichung ist einfach

Ic. $$a^{\wedge}x = \pm\, a'^{\wedge}x'$$

und geht aus der vorhergehenden hervor, wenn $\lambda = \pm 1$ gesetzt wird. Die Büschel kann man in dem einem Falle als einstimmig gleich, im andern als entgegengesetzt (symmetrisch) gleich bezeichnen.

2) Wie in §. 144 die Gleichung III. für collineare Punktreihen, ergiebt sich auch für zwei collineare Strahlbüschel die Gleichung

II. $$\nu \frac{\sin a^{\wedge}x}{\sin b^{\wedge}x} + \pi \frac{\sin c'^{\wedge}x'}{\sin b'^{\wedge}x'} = 1,$$

worin die beiden Constanten, ν, π die Werthe

$$\nu = \frac{\sin b^{\wedge}c}{\sin a^{\wedge}c}, \quad \pi = \frac{\sin b'^{\wedge}a'}{\sin c'^{\wedge}a'}$$

haben und b, b' zwei entsprechende, dagegen a und c' irgend zwei andere Strahlen bedeuten.

Wird a senkrecht auf b, c' senkrecht auf b' vorausgesetzt, so hat man

IIb. $$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\nu'}{tg\, b^{\wedge}x} + \dfrac{\pi'}{tg\, b'^{\wedge}x'} = 1, \text{ oder} \\ \nu'\, tg\, a^{\wedge}x + \pi'\, tg\, c'^{\wedge}x' = 1 \end{array} \right.$$

In der letzten Gleichung ist nur nicht ausser Acht zu lassen, dass a und c' nicht mehr zwei beliebige, sondern zwei zu den entsprechenden Graden b, b' senkrechte Strahlen sind. Die erstere Gleichung giebt zu erkennen, dass es in jedem von zwei collinearen Büscheln zwei Winkel giebt, die ihren ent-

sprechenden gleich sind, von denen der eine gleichsinnig, der andere entgegengesetzt gerichtet ist. Die beiden dieser Bedingung genügenden Winkel sind durch die Relation

$$tg\, b^\wedge x = \nu' \pm \pi'$$

bestimmt.

3) Die Gleichung V. endlich (§. 147) lässt sich nach ihrer Zusammensetzung aus Doppelverhältnissen unmittelbar auf Strahlbüschel übertragen:

$$\sin(acxd)\sin(b'd'x'c') - \sin(acxd) - \sin(b'd'x'c') + \sin(acbd) = 0.$$

§. 149.

Collineare Punktreihen auf einer und derselben Graden. Haben die collinearen Punktreihen auf zwei Graden s und s' perspectivische Lage, ist also $s{\cdot}s'$ ein selbstentsprechender Punkt und gehen die Verbindungsgraden AA', BB'... durch einen und denselben Punkt P (den Projectionspunkt); so kann man die den unendlich fernen Punkten U und U' der beiden Graden entsprechenden Punkte J und J' mittels zweier durch P und den Graden s und s' parallel gelegter Strahlen bestimmen. Da nun die entsprechenden Abschnitte $s{\cdot}s'J$ und $s{\cdot}s'J'$ ihrer Grösse nach nur von der Bedingung, dass die Punktreihen collinear sind, abhängen, d. h. constant sind für jede beliebige Lage der Graden s und s', so hat das Parallelogramm $PJs{\cdot}s'J'$ constante Seiten und nur die Winkel desselben verändern sich, wenn die eine Grade z.B. s' um den Durchschnittspunkt $s{\cdot}s'$ herumgedreht wird. Denkt man sich bei dieser Drehung von s' die Grade s fest, also auch den Punkt J unveränderlich, so beschreibt der Projectionspunkt P eine Kreislinie, deren Mittelpunkt J und deren Halbmesser $PJ = s{\cdot}s'J'$ ist. Fallen dabei die beiden Graden s, s' auf einander, so liegt der Punkt P auf der Graden von $s{\cdot}s'$ um die Strecke $s{\cdot}s'J \pm s{\cdot}s'J'$ entfernt, je nachdem der Winkel $s{\cdot}s' = 0$ oder 180^0. Bezeichnet man die erstere Lage des Punktes P mit P_1, für welche $s{\cdot}sP_1 = s{\cdot}s'J + s{\cdot}s'J'$ ist, und die andere mit P_2, für welche $s{\cdot}s'P = s{\cdot}s'J - s{\cdot}s'J'$ ist, so ist leicht einzusehen, dass in beiden Fällen in den Projectionspunkten P_1 oder P_2 zwei entsprechende Punkte der Graden s und s' bei deren Aufeinanderlegen in gleicher oder entgegengesetzter Richtung (wenn $s^\wedge s' = 0$ oder 180^0 ist) in einen Punkt zusammengefallen sind, dass also ausser $s{\cdot}s'$ in dem einen Falle noch P_1 in dem andern Falle noch P_2 ein Doppelpunkt ist. Es fragt sich

nun, ob bei irgend einer andern, nicht perspectivischen Lage der Graden s, s', wenn sie beliebig aufeinander gelegt werden, auch dergleichen singuläre Punkte anzutreffen sind.

Zur Beantwortung dieser Frage gehen wir von der allgemeinen Gleichung für die Collineation zweier gradliniger beliebig gelegener Punktreihen aus:

$$AX.B'X' + \lambda . AX + \mu B'X' + \nu = 0,$$

worin A und B' zwei beliebige feste Punkte auf beiden Graden bedeuten. Fallen aber die beiden Graden zusammen, so kann man für B' auch den Punkt A nehmen, wofür die Gleichung

$$AX.AX' + \lambda . AX + \mu AX' + \nu = 0$$

wird, und wenn dann auch zwei entsprechende Punkte X und X' zusammenfallen oder ein Doppelpunkt werden sollen, so ist die Bedingungsgleichung dafür:

1) $$\overline{AX}^2 + (\lambda + \mu) AX + \nu = 0,$$

welche im Allgemeinen zwei und höchstens nur zwei Werthe für AX anzeigt, so dass es also zwei Punkte und nicht mehr giebt, welche als Doppelpunkte bezeichnet werden können.

§. 150.

Zusätze. 1) Setzt man in der Gleichung (1) für λ, μ, ν die oben in §. 146 angegebenen Werthe ein, so erhält man mit Berücksichtigung, dass A und B' denselben Punkt bedeuten,

$$\overline{AX}^2 - (AJ + AJ') AX + AJ . AA' = 0,$$

wobei J, J' die dem unendlich fernen Punkte der Graden entsprechenden Punkte bezeichnen, insofern letzterer resp. der zweiten oder ersten Punktreihe angehört. Sind also E und F die beiden dieser Gleichung entsprechenden Punkte, so hat man für diese

$$AE + AF = AJ + AJ'.$$

Bezeichnet man mit O den Mittelpunkt des Abschnittes JJ', so ist auch O der Mittelpunkt von EF oder:

Die Mitte der beiden Doppelpunkte ist die Mitte der beiden Punkte, welche in den beiden Punktreihen dem unendlich fernen Punkte der Graden entsprechen.

Da $2AO = AJ + AJ'$ ist, so geht die Bedingungsgleichung für die beiden Doppelpunkte über in

2) $$\overline{AX}^2 - 2AO . AX + AJ . AA' = 0.$$

2) Da in der Gleichung 2) der Punkt A ein beliebig fester

Punkt der Graden ist, so kann man ihn mit dem Punkte O zusammenfallen lassen und wenn O' dann den Punkt bezeichnet, welcher in der zweiten Punktreihe dem Punkte O der ersten entspricht, so hat man für die Bestimmung der Doppelpunkte die einfachere Gleichung

$$\overline{OX}^2 + OJ.OO' = 0,$$

oder weil O die Mitte von JJ', folglich $OJ' = -OJ$ ist,

$$3) \quad \begin{cases} OX^2 - OJ'.OO' = 0, \text{ und} \\ OE = -OF = \pm\sqrt{OJ'.OO'}. \end{cases}$$

Hiernach ist die **Construction** der Doppelpunkte auf die einer mittleren Proportionale zwischen den Abschnitten OJ' und OO' zurückgeführt. Die Punkte E und F werden in der Graden selbst liegen, oder wie man gewöhnlich sagt, reell sein, wenn OJ und OO' gleichgerichtet, oder J und O' auf einer und derselben Seite von O aus liegen. Dagegen sind E und F auf eine durch O gelegte Senkrechte in dem Abstande $\sqrt{J'O.OO'}$ oder $\sqrt{OJ.OO'}$ von O aus zu verlegen, wenn J' und O' den Punkt O zwischen sich haben, oder wenn J und O' auf einerlei Seite von O aus liegen. (§. 101 und 103.)

3) Setzt man in dem allgemeinen Ausdrucke I. §. 141 für die beliebigen Punkte A und B die Doppelpunkte E und F ein, welche auch die entsprechenden Punkte A' und B' vertreten, so erhält man

$$\frac{EX}{FX} = \lambda \frac{EX'}{FX'} \text{ oder } \frac{EX}{FX} : \frac{EX'}{FX'} = \lambda$$

d. i.

$$(EFXX') = \lambda.$$

Wird also eine Strecke EF nach constantem Doppelverhältnisse λ in den veränderlichen Punkten X, X' getheilt, so bilden alle in den Doppelverhältnissen zuerst gestellten Theilungspunkte X eine Punktreihe, die der aus den zuletzt gesetzten Theilungspunkten X' zusammengesetzten Reihe collinear ist.

Ist dabei $\lambda = -1$, so wird die Strecke EF durch X und X' stets **harmonisch** getheilt, folglich stehen je drei Paare zusammengehöriger Punkte X, X' in **Involution** (§. 79, 3), deren Doppelpunkte E und F sind.

§. 151.

Doppelpunkte ähnlicher, einstimmig gleicher und symmetrisch gleicher Reihen. 1) Sind die beiden auf einer

Graden liegenden Punktreihen ähnlich, so ist der eine ihrer Doppelpunkte der unendlich ferne Punkt der Graden, Denn die allgemeine Gleichung für die Collineation der Reihen, deren Doppelpunkte E und F sind,

$$(EFXX') = (XX'EF) = \lambda$$

geht, wenn der eine Doppelpunkt F der unendlich ferne Punkt der Graden ist, in das einfache constante Verhältniss

$$\frac{EX}{EX'} = \lambda$$

über, welches die ähnliche oder proportionale Theilung der Graden durch die veränderlichen Punkte X, X' anzeigt.

2) Die Construction des endlich gelegenen Doppelpunktes E ist in diesem Falle sehr einfach. Sind die ähnlichen Punktreihen durch die Punkte A, A' und B, B' bestimmt, so hat man

$$\frac{AX}{A'X'} = \lambda = \frac{AB}{A'B'}$$

und wenn X, X' in den Doppelpunkt E zusammenfallen:

$$\frac{AE}{A'E} = \frac{AB}{A'B'}.$$

Legt man also durch A und A' zwei Parallelen, auf denen man die Abschnitte AB_1, $A'B_2$ gleich resp. AB und $A'B'$ in gleicher oder entgegengetzter Richtung abträgt, je nachdem AB und $A'B'$ gleiche oder entgegengesetzte Richtung haben, und zieht dann die Grade B_1B_2, so schneidet diese die AA' in dem Punkte E.

Oder legt man durch einen beliebigen Punkt G ausserhalb der Graden AA' zwei Kreise, von denen der eine noch durch A und B', der andere durch A' und B geht und schneiden sich diese Kreise in einem zweiten G', so trifft die gemeinschaftliche Sehne GG' die AA' in E. Denn aus $\frac{AE}{A'E} = \frac{AB}{A'B'}$ folgt $\frac{AE}{BE} = \frac{A'E}{B'E}$ oder $AE \,.\, B'E = A'E \,.\, BE = GE \,.\, G'E$. (M. s. §. 83.)

3) Setzt man weiter voraus, dass das constante Verhältniss $EX : EX' = \lambda = -1$ ist, so liegt der Doppelpunkt E in der Mitte eines jeden von zwei entsprechenden Punkten X, X' gebildeten Abschnitts, so dass die beiden Punktreihen einander gleich aber von entgegengesetzter Richtung oder wie man auch sagt, symmetrisch gleich sind.

4) Nimmt man die Constante $EX : EX' = \lambda = +1$ an, so muss ausser F auch E der unendlich ferne Punkt der Graden sein, oder

es fallen die beiden Doppelpunkte in dem unendlich fernen Punkte der Graden zusammen; man hat dann

$$AE : A'E = AB : A'B' = 1$$

d. h. die beiden Punktreihen sind einander gleich und von derselben Richtung oder einstimmig gleich.

§. 152.

Bedingungsgleichungen für das Zusammenfallen der beiden Doppelpunkte in einem einzigen. Die quadratische Gleichung für die Doppelpunkte zweier in einer Graden liegenden collinearen Punktreihen:

$$\overline{AX}^2 + (\lambda + \mu) AX + \nu = 0$$

kann nach der Beschaffenheit der Constanten zwei verschiedene reelle, zwei gleiche, oder auch zwei complexe Wurzeln geben. Sollen die Wurzeln gleich sein, oder die Doppelpunkte in Einem zusammenfallen, so muss

$$(\lambda + \mu)^2 - 4\nu = 0$$

sein, oder wenn man für λ und μ, die geometrischen Ausdrücke $\lambda = -AJ$, $\mu = -AJ'$, $\lambda + \mu = -(AJ + AJ') = -2AO$, wo O die Mitte von JJ' bezeichnet, einsetzt:

$$\nu = \overline{AO}^2.$$

Hiernach ist die Bestimmungsgleichung des Doppelpunktes

$$\overline{AX}^2 - 2AO\,AX + \overline{AO}^2 = 0, \text{ oder}$$

$$AX = AO,$$

d. h. Die Doppelpunkte fallen in dem Mittelpunkte O des Abschnittes JJ' zusammen.

Die Gleichung (§. 149) der Collineation der Punktreihen für diesen Fall geht dann über in

A) $\quad AX.AX' - AJ'.AX - AJ.AX' + \overline{AO}^2 = 0.$

Da der feste Punkt A willkürlich verlegt werden kann, so lasse man ihn erst mit O zusammenfallen; alsdann wird aus vorstehender Gleichung:

$$OX.OX' - OJ'.OX - OJ.OX' = 0$$

oder weil $OJ' = -OJ$ ist,

B) $\quad OX.OX' - OJ.XX' = 0.$

Hieraus folgt, dass das Verhältniss

$$\frac{OX.OX'}{XX'}$$

constant ist. Für zwei entsprechende Punkte A, A' ist demnach

$$\frac{OX.OX'}{XX'}=\frac{OA.OA'}{AA'}$$

oder wenn $OX'-OX$ statt XX', $OA'-OA$ statt AA' gesetzt und die Gleichung beiderseits umgekehrt wird:

C) $$\frac{1}{OX}-\frac{1}{OX'}=\frac{1}{OA}-\frac{1}{OA'};$$

eine der einfachsten Gleichungen der Collineation dieser Art gradliniger Punktreihen.

Giebt man derselben die Form

$$\frac{1}{OX}-\frac{1}{OA}=\frac{1}{OX'}-\frac{1}{OA'},$$

so folgt auch daraus

D) $$\frac{OX}{AX}.OA=\frac{OX'}{A'X'}OA'.$$

Nimmt man in dieser, sowie in der vorhergehenden C) den Punkt A' als den unendlich fernen der Graden, setzt also J für A, so erhält man noch

C') $$\frac{1}{OX}-\frac{1}{OX'}=\frac{1}{OJ}$$

und

D') $$\frac{OX}{JX}.OJ+OX'=0.$$

Setzt man ferner in der letzten Gleichung $OX+XX'$ für OX', so giebt diese

$$OX\left(\frac{OJ}{JX}+1\right)+XX'=0,$$

oder endlich

E) $$OX^2+JX.XX'=0.$$

§. 153.

Eigenthümlichkeiten zweier collinearer Theilungen derselben Graden, wenn deren Doppelpunkte imaginär sind. Wie bereits §. 150, 2 bemerkt worden ist, sind die Doppelpunkte imaginär, wenn die Abschnitte OO', OJ' entgegengesetzte Richtung haben, wobei O' der dem Punkte O entsprechende Punkt der zweiten Reihe ist.

Construirt man hierauf nach den Principien von §. 102 u. d. f. die imaginären Doppelpunkte, indem man auf einer durch O gelegten Senkrechten die Abschnitte

$$OE = -OF = \sqrt{OJ.OO'}$$

abträgt, und zieht von E (oder F) nach X, X' und J die Graden EX, EX', EJ, so findet sich, dass der Winkel XEX' (oder XFX') von constanter Grösse und gleich dem Winkel EJO (FJO) ist.

Denn lässt man in der allgemeinen Gleichung für die collineare Theilung einer Graden:

$$AX.AX' - AJ'.AX - AJ.AX' + AJ.AA' = 0$$

den Punkt O für A und O' für A' eintreten, so erhält man zunächst

$$OX.OX' - OJ'.OX - OJ.OX' + OJ.OO' = 0$$

oder, weil $OJ = -OJ'$ ist,

$$OX.OX' + OJ.OX - OJ.OX' + OJ.OO' = 0$$

und wenn man durch $OJ.OO' = \overline{OE}^2$ dividirt,

$$\frac{OX}{OE} \cdot \frac{OX'}{OE'} + \frac{OJ}{OE}\left(\frac{OX}{OE} - \frac{OX'}{OE}\right) + 1 = 0$$

d. i.

$$tg\, OEX . tg\, OEX' + \frac{OJ}{OE}(tg\, OEX - tg\, OEX') + 1 = 0$$

folglich

$$\frac{tg\, OEX' - tg\, OEX}{1 + tg\, OEX'\, tg\, OEX} = \frac{OE}{OJ} = tg\, EJO.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist aber

$$tg\,(OEX' - OEX) = tg\, XEX',$$

mithin

$$XEX' = EJO = Const.$$

Den Winkel EJO oder dessen Tangente kann man abhängig betrachten von der Strecke OJ oder OJ', wenn $OE^2 = -OO'.OJ' = OO'.OJ$ constant gedacht wird, und damit erhält zugleich OO' eine bestimmte Grösse und Richtung; mit andern Worten: nimmt man den Punkt E und den Punkt J, oder J' zuerst an, und bestimmt die übrigen Punkte O, O', J' oder J auf der Graden nach den erwähnten Beziehungen, so hat man auf der Graden JJ' drei zugeordnete Punkte, nämlich O, J, U, und O', U, J' — wenn U den unendlich fernen Punkt der Graden vorstellt —, welche die collineare Beziehung der beiden auf der Graden liegenden Punktreihen

X und X' hinreichend bestimmen, nämlich derjenigen Punkte, von denen aus die zugeordneten Schenkel EX, EX' einen constanten Winkel ($= EJO$) bilden. Hieraus schliessen wir:

Lässt man einen Winkel von constanter Grösse sich um seinen Scheitel drehen, so bestimmen seine Schenkel auf einer festen Transversale zwei collineare Punktreihen, von deren zwei **imaginären** Doppelpunkten der eine der feste Scheitel des Winkels ist.

Ist der um seinem Scheitel sich drehende Winkel ein rechter, so bestimmen seine Schenkel eine involutorische Theilung der Graden. (M. s. §. 76, 3 u. §. 155.)

§. 154.

Anderweite Gleichungen für die collineare Theilung einer Graden. 1) Zwei collineare Punktreihen auf derselben Graden können ausser durch die Gleichung in §. 149 auch ausgedrückt werden durch

2) $$AX.B'X' + \lambda(AX - B'X') + \nu = 0.$$

Denn nimmt man in der allgemeinen Gleichung IV) §. 146

$$AX.B'X' - B'J'.AX - AJ.BX' + AJ.B'A' = 0$$

die Punkte A und B' so an, dass

$$B'J' = -AJ$$

ist, und setzt dann die Constante $AJ = \lambda$, so ergiebt sich die Gleichung 2).

Die Bedingung $B'J' = -AJ$ giebt zu erkennen, dass A und B' gleichweit von J, J' also auch von O abstehen und zwar sind beide Punkte zugleich entweder innere oder äussere des Abschnittes JJ'.

2) Die collineare Theilung der Graden lässt sich ferner ausdrücken durch

3) $$AX.B'X + \gamma XX' + \delta = 0.$$

Nimmt man wieder B' so an, dass $B'J' = -AJ$ ist und setzt dann in der Gleichung

$$AX.B'X' + AJ.AX - AJ.B'X' + AJ.B'A' = 0$$

$AX' - AB'$ für $B'X'$, so kommt

$$AX.B'X' + AJ(AX - AX') + AJ(AB' + B'A') = 0$$

oder

$$AX.B'X' - AJ.XX' + AJ.AA' = 0$$

folglich u. s. w.

Lässt man in der Gleichung 3) für A den Doppelpunkt E eintreten, so fällt wegen $B'J' = -AJ$ oder $OB' = -OA$ auch B' mit F zusammen und der Abschnitt AA' wird $= 0$, womit die Gleichung 3) übergeht in

3a) $$EX.FX' - EJ.XX' = 0.$$

Nimmt man dagegen in 3) für den Punkt A den Punkt O an, so muss auch B' mit O zusammenfallen und die Gleichung 3) erhält die Form:

3b) $$OX.OX' - OJ.XX' + OJ.OO' = 0.$$

3) Die collineare Theilung einer Graden lässt sich endlich noch wiedergeben durch:

4) $$\overline{OX}^2 + JX.XX' + \nu = 0.$$

Denn setzt man in der vorhergehenden Gleichung 3b), $OX + XX'$ für OX' ein, so erhält man

$$\overline{OX}^2 + (OX - OJ)\, XX' + OJ.OO' = 0$$

oder

$$\overline{OX}^2 + JX.XX' + OJ.OO' = 0,$$

folglich u. s. w.

§. 155.

Involutorishe Theilung einer Graden als besonderer Fall der collinearen Theilung. Schon oben in §. 150, 3, sowie in §. 153 ist eines besonderen Falles Erwähnung gethan, in welchem die collineare Theilung einer Graden in eine involutorische übergeht. Dieses findet nun jedesmal statt, wenn in der Gleichung für die Collineation (§. 149)

$$AX.AX' + \lambda AX + \mu AX' + \nu = 0$$

die Coefficienten λ und μ einander gleich sind. Die Gleichung geht dann über in

$$AX.AX' + \lambda\,(AX + AX') + \nu = 0,$$

in welcher X mit X' ohne sie zu ändern vertauschtwerden können, da die Abschnitte AX, AX' in ihr symmetrisch vorkommen. Man kann also den Punkt X' beliebig der $\left\{\begin{matrix}\text{ersten}\\ \text{zweiten}\end{matrix}\right\}$ Punktreihe und seinen entsprechenden als der $\left\{\begin{matrix}\text{zweiten}\\ \text{ersten}\end{matrix}\right\}$ angehörig ansehen. Darin nun, so wie in der Gleichheit der Doppelverhältnisse ent-

sprechender Punkte, die bei der Collineation mit vorausgesetzt ist, besteht eben das *Wesen* der Involution (§. 65).

Umgekehrt: hat bei einer collinearen Theilung einer Graden *Ein* beliebiger Punkt der Graden, als der $\left\{\begin{matrix}\text{ersten}\\ \text{zweiten}\end{matrix}\right\}$ Theilung angehörig, *denselben* entsprechenden Punkt in der $\left\{\begin{matrix}\text{zweiten}\\ \text{ersten}\end{matrix}\right\}$ Theilung, so ist die Grade involutorisch getheilt und es besteht die Gleichung

$$AX . AX' + \lambda (AX + AX') + \nu = 0$$

als eine charakteristische für diese Theilung. Es seien A, B, C drei beliebige feste Punkte der ersten, A', B', C' die ihnen entsprechenden der zweiten Theilung, und seien X und X' zwei entsprechende Punkte der Art, dass

sowohl $$(ABCX) = (A'B'C'X')$$
als auch $$(ABCX') = (A'B'C'X)$$
ist, so ergiebt sich durch Elimination von C und C' nach §. 31

$$(ABX'X) = (A'B'XX')$$

d. h. die Punktepaare A und A', B und B', X und X' sind in Involution. Sodann giebt die Collineation der Punkte A, B, C, X und A', B', C', X' die Gleichung (§. 149)

$$AX . AX' + \lambda AX + \mu AX' + \nu = 0$$

und ebenso die Collineation von A, B, C, X' und A', B', C', X

$$AX' . AX + \lambda AX' + \mu AX + \nu = 0.$$

Aus diesen Gleichungen folgt durch Subtraction

$$\lambda (AX - AX') + \mu (AX' - AX) = 0$$

oder

$$(\lambda - \mu)(AX - AX') = (\lambda - \mu) X'X = 0,$$

folglich

$$\lambda = \mu,$$

da $X'X$ den Voraussetzungen nach nicht $= 0$ sein kann. Mithin ist die Gleichheit der Coefficienten λ und μ oder die daraus hervorgehende obige Gleichung bezeichnend dafür, dass irgend ein Punkt X als der ersten oder zweiten Theilung angehörig in der zweiten oder ersten Theilung X' zum entsprechenden hat, d. h. dass durch die veränderlichen Punkte X und X' die Grade *involutorisch* getheilt wird.

§. 156.

Zusätze. 1) Jede der Relationen, welche ausdrücken, dass zwei auf derselben Graden liegende Punktreihen collinear sind, wird nach dem vorhergehenden Satze in dem besonderen Falle, dass die veränderlichen Punkte X und X' symmetrisch in der Gleichung vorkommen, also ohne Störung derselben mit einander vertauscht werden können, eine involutorische Theilung der Graden ausdrücken; und umgekehrt kann man als Bedingung dafür, dass eine die Collineation zweier Reihen ausdrückende Gleichung zugleich eine involutorische Theilung der Graden andeutet, die Symmetrie der Gleichung bezüglich der entsprechenden Punkte X und X' aufstellen.

Diese Symmetrie ist natürlich nur dann vorauszusetzen, wenn die Punkte X und X' auf einerlei Anfangspunkt bezogen sind, wie in der Gleichung des vorhergehenden §.

$$AX.AX' + \lambda(AX + AX') + \nu = 0$$

oder wie in den folgenden

$$(EFXX') = -1, \text{ (§. 150, 3)}$$
$$OX.OX' = \mu, \text{ (§. 143)}$$
$$\frac{AX}{A'X} = \lambda \frac{A'X'}{AX'}, \text{ (§. 141)}$$

deren jede eine involutorische Theilung einer Graden durch die Punkte X und X' anzeigt.

2) Sind in dem betreffenden Gleichungen die veränderlichen Punkte X und X' nicht auf dieselben Anfangspunkte bezogen, so kann man für die Involution die Bedingungsgleichung zwischen den Coefficienten dadurch ermitteln, dass man festgesetzt, ein beliebiger Punkt habe denselben entsprechenden, mag er der einen oder andern Theilung angehörig betrachtet werden. Hierzu kann auch der unendlich ferne Punkt der Graden benutzt werden. z. B. Die allgemeinere Gleichung für die Collineation der durch X und X' bestimmten Reihen auf derselben Graden ist

$$1) \qquad AX.B'X' + \lambda AX + \mu B'X' + \nu = 0,$$

in welcher $\lambda = J'B'$ und $\mu = JA$ ist. Soll nun der unendlich entfernte Punkt der Graden denselben entsprechenden Punkt haben, mag man ihn der ersten oder zweiten Theilung zugehörig betrachten, so müssen die Punkte J und J' einen und denselben Punkt vorstellen, und man hat demnach

$$JA = J'A, \text{ oder } J'B' - JA = AB',$$

folglich

$$\lambda - \mu = AB'$$

als Bedingungsgleichung für die involutorische Theilung der Graden durch Punkte X, X', welche der Gleichung 1) genügen.

3) In dem besondern Falle, dass von beiden collinearen Reihen ein Doppelpunkt der unendlich ferne Punkt der Graden ist, oder dass die Grade proportional getheilt ist, hat man nach §. 145, 2 die Gleichung

$$AX + \lambda B'X' = \nu,$$

oder

$$AX + \lambda AX' = \nu + \lambda AB'.$$

Setzt man nun $\lambda = 1$, so kann man in letzterer Gleichung X mit X' vertauschen, ohne dieselbe zu verändern, folglich drückt die aus dieser Annahme hervorgehende Gleichung

$$AX + B'X' = \nu$$

aus, dass die Grade durch X und X' auch involutorisch getheilt wird. Der andere Doppelpunkt ist dann offenbar die Mitte eines jeden zwischen zwei entsprechenden Punkten enthaltenen Abschnitts XX'.

§. 157.

Involutionen von Punkten zweier auf einer Graden liegenden collinearen Punktreihen. Sind A, B, $C \ldots A'$, B', $C' \ldots$ die entsprechenden Punkte zweier auf einer Graden liegender Punktreihen, so sind die beiden Doppelpunkte E, F mit den verwechselten Punkten von je zwei Punktepaaren, wie z. B. mit A und B', A' und B in Involution.

Da nämlich nach §. 153, 3

$$(ABEF) = (A'B'EF),$$

so ist auch nach §. 27, I.

$$(ABEF) = (B'A'FE).$$

d. h. nach §. 65 die Punktepaare A und B', B und A', E und F sind in Involution.

Hieraus folgt wieder nach §. 76, 1, dass die drei Kreise, welche über AB', $A'B$ und EF als Durchmesser beschrieben werden, durch dieselben zwei Punkte gehen; und dass drei Kreise, welche durch einen und denselben Punkt G der Ebene gelegt sind und zu Sehnen

die resp. Abschnitte AB', $A'B$ und EF haben, durch einen und denselben zweiten Punkt G' hindurchgehen.

Diese Sätze behalten nach §. 131, 4 u. 6 ihre allgemeine Giltigkeit, auch wenn die beiden Doppelpunkte E, F imaginär sind.

§. 158.

Lehrsatz. Zwei collinear getheilte Grade s und s' können immer so auf einander gelegt werden, dass die collinearen Theilungen eine Involution bilden.

Denn nach §. 145, 1 können zu zwei entsprechenden Punkten A und A' immer zwei andere B und B' gefunden werden, dass die entsprechenden Abschnitte AB und $A'B'$ einander gleich sind. Wird nun die zweite Grade s' so auf die erste gelegt, dass B' mit A und B mit A' zusammenfällt, so ist, wenn noch C und D der ersten Theilung den Punkten C' und D' der zweiten entsprechen, wegen $(ABCD) = (A'B'C'D')$ auch $(AA'CD) = (A'AC'D')$, welches aber die eine Involution hinreichend bezeichnende Gleichung ist. (§. 155 und §. 65.)

§. 159.

Construction der Doppelpunkte E, F und des Mittelpunktes O derselben, wenn drei Paare entsprechender Punkte A, B, C und A', B', C' zweier auf einer Graden liegender collinearer Punktreihen gegeben sind. Die Involution je zweier verwechselter Punktepaare mit E und F giebt nach Analogie von §. 83, 2 und 3 folgende Constructionen an die Hand.

1) Durch einen beliebigen Punkt G der Ebene lege man zwei Kreise, welche zu Sehnen bezüglich die Abschnitte AB' und $A'B$ haben und sich in einem zweiten Punkte G' schneiden. Desgleichen lege man durch G zwei Kreise, welche zu Sehnen bezüglich die Abschnitte AC' und $A'C$ haben und sich in dem Punkte G'' schneiden. Endlich ziehe man durch G, G', G' einen Kreis, welcher die Grade $ABCA'$.., in zwei reellen oder imaginären Punkten E und F schneidet, welche die gesuchten Doppelpunkte sind. Berührt letzterer Kreis die Grade, so fallen die beiden Doppelpunkte (im Punkte O) zusammen.— Sind zwei der gegebenen Punkte z. B. B und C' der unendlich ferne Punkt der Graden, also J' für B' und J für C zu setzen, so vereinfacht sich die Aufgabe und Lösung. Zu den Punkten A, J und A', J' findet man einfach die Doppelpunkte,

wenn man die Graden GA' und GA zieht, welche resp. die Kreise durch GAJ' und $GA'J$ in den Punkten G' und G'' schneiden, hierauf wie vorher durch G, G', G'' einen Kreis legt u. s. w.

2) Ueber den Abschnitten AB', BA', AC', CA' als Durchmesser beschreibe man Kreise, von denen die zwei ersten in G und G', die beiden letzten in G'' und G''' sich schneiden, der durch G, G', G'', G'' gelegte Kreis bestimmt dann auf der Graden ABC die gesuchten Doppelpunkte.

Nimmt man, wie oben, die beiden Punkte B und C' als in dem unendlich fernen Punkte der Graden vereinigt an, und bezeichnet die entsprechenden B' und C mit J' und J (so dass die collineare Theilung der Graden durch die Gleichung

$$JX . J'X = JA . J'A'$$

angedeutet sein kann), so vereinfacht sich die letztere Construction der Doppelpunkte dadurch, dass der über dem unendlich grossen Abschnitt $A'B$ als Durchmesser beschriebene Kreis in eine durch A' gelegte Senkrechte und ebenso der über AC' beschriebene Kreis in die durch A gelegte Senkrechte übergeht. Daher:

Ueber $A'J$ als Durchmesser beschreibe man einen Kreis und errichte in A' eine Senkrechte über $A'J$, die den Kreis in $\mathfrak{A}$ trifft. Desgleichen beschreibe man über AJ' als Durchmesser einen Kreis und errichte in A ein Perpendikel, dass den Kreis in $\mathfrak{A}'$ treffe. Endlich lege man durch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ einen Kreis, dessen Mittelpunkt in AA' liegt, so giebt dieser die Doppelpunkte E und F auf AA' an. Der Mittelpunkt O des letztern Kreises muss den Abschnitt EF halbiren, ist mithin als der Halbirungspunkt von JJ' gegeben; deshalb braucht man nur einen der beiden Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ zu bestimmen.

Verlegt man den Punkt A in die Mitte O des Abschnitts JJ' und wird der entsprechende Punkt A' mit O' bezeichnet, so ist der Halbmesser des letztgenannten Kreises $O\mathfrak{A} = \sqrt{OO' . OJ'}$ ein Ausdruck der bereits in §. 150, 2 entwickelt worden ist.

§. 160.

Collineare Strahlbüschel mit demselben Mittelpunkte. Haben zwei collineare Strahlbüschel S und S' perspectivische Lage, so schneiden sich entsprechende Strahlen in einer **gradlinigen** Punktreihe p, welche als der perspectivische Durchschnitt der Büschel zu bezeichnen ist. In dem unendlich entfernten Punkte U desselben werden sich auch zwei entsprechende Strahlen u und u' treffen, welche beide dem perspectivischen Durch-

schnitte p parallel sind. Bewegt man nun das eine Büschel S' sich selbst parallel, so dass sein Mittelpunkt S' auf dem beiden Büscheln gemeinschaftlichen Strahle SS' bleibt, so werden auch die beiden Strahlen u und u' sich selbst und dem perspectivischen Durchschnitte p parallel bleiben, letzterer aber dabei seine Lage fortwährend verändern, so wie S' auf der Graden SS' fortrückt. Kommt dabei das eine Büschel S' auf das andere zu liegen, so dass derselbe Strahl SS ein gemeinschaftlicher bleibt, so werden auch die Strahlen u und u' auf einander und mit dem perspectivischen Durchschnitt p zusammenfallen. Man hat also bei diesen concentrischen Strahlbüscheln in perspectivischer Lage zwei Doppelstrahlen, nämlich SS' und u oder u'; es fragt sich nun, ob auch bei beliebiger Lage der beiden in einem Mittelpunkte vereinigten Büschel entsprechende Strahlen auf einander fallen.

1) Zur Beantwortung dieser Frage kann man von der allgemeinen Gleichung V. §. 148,3 ausgehen, die auch, wenn man die symbolischen Ausdrücke der Doppelverhältnisse auflöst und hierauf mit $\frac{\sin a^\wedge d}{\sin d^\wedge c} \cdot \frac{\sin b'^\wedge c'}{\sin c'^\wedge d'}$ multiplicirt, folgende Gestalt erhält:

$$\frac{\sin a^\wedge x}{\sin c^\wedge x} \cdot \frac{\sin b'^\wedge x'}{\sin d'^\wedge x'} - \frac{\sin b'^\wedge c'}{\sin d'^\wedge c'} \cdot \frac{\sin a^\wedge x}{\sin c^\wedge x} - \frac{\sin a^\wedge d}{\sin c^\wedge d} \cdot \frac{\sin b'^\wedge x'}{\sin d'^\wedge x'}$$
$$+ \frac{\sin a^\wedge b}{\sin c^\wedge b} \cdot \frac{\sin b'^\wedge c'}{\sin d'^\wedge c'} = 0,$$

worin man noch für das letzte Glied setzen kann:

$$\frac{\sin a^\wedge d}{\sin c^\wedge d} \cdot \frac{\sin b'^\wedge a'}{\sin d'^\wedge a'}.$$

Nimmt man nun für das Zusammenfallen der beiden collinearen Büschel an, dass die willkürlich anzunehmenden Strahlen b', d', resp. über a und c zu liegen kommen, und sind i und i' die beiden Strahlen, welche resp. in dem ersten und zweiten Büschel dem Strahle c entsprechen, insofern derselbe dem zweiten und ersten gehörig betrachtet wird, sind also i und i' für d und c' zu setzen; so geht obige Gleichung über in

$$\frac{\sin a^\wedge x}{\sin c^\wedge x} \cdot \frac{\sin a^\wedge x'}{\sin c^\wedge x'} - \frac{\sin a^\wedge i'}{\sin c^\wedge i'} \cdot \frac{\sin a^\wedge x}{\sin c^\wedge x} - \frac{\sin a^\wedge i}{\sin c^\wedge i} \cdot \frac{\sin a^\wedge x'}{\sin c^\wedge x'}$$
$$+ \frac{\sin a^\wedge i}{\sin c^\wedge i} \cdot \frac{\sin a^\wedge a'}{\sin c^\wedge a'} = 0.$$

Sollen dann die beiden Strahlen x und x' auf einander fallen, so hat man für diese die Bestimmungsgleichung:

$$\frac{\sin^2 a^\wedge x}{\sin^2 c^\wedge x} - \left(\frac{\sin a^\wedge i}{\sin c^\wedge i} + \frac{\sin a^\wedge i'}{\sin c^\wedge i'}\right)\frac{\sin a^\wedge x}{\sin c^\wedge x} + \frac{\sin a^\wedge i}{\sin c^\wedge i} \cdot \frac{\sin a^\wedge a'}{\sin c^\wedge a'} = 0,$$

woraus im Allgemeinen abzunehmen ist, dass es zwei und nicht mehr Doppelstrahlen in den vereinigten Büscheln giebt.

Dieses ergiebt sich einfacher auch daraus, dass wenn man die mit den Mittelpunkten auf einander liegenden collinearen Büschel durch eine Transversale schneidet, auf dieser zwei collineare Punktreihen bestimmt werden, nach deren Doppelpunkten offenbar die Doppelstrahlen gerichtet sind.

Nimmt man die beiden beliebig gewählten festen Strahlen a, c senkrecht auf einander an, so geht die allgemeine Gleichung für die Collineation der beiden Büschel in folgende über:

$$tg\, a^\wedge x\; tg\, a^\wedge x' - tg\, a^\wedge i' . tg\, a^\wedge x - tg\, a^\wedge i\; tg\, a^\wedge x' + tg\, a^\wedge a'\; tg\, a^\wedge i = 0,$$

und die für die Doppelstrahlen in

$$tg^2 a^\wedge x - (tg\, a^\wedge i + tg\, a^\wedge i')\; tg\, a^\wedge x + tg\, a^\wedge a'\; tg\, a^\wedge i = 0.$$

Bezeichnen e und f die beiden Doppelstrahlen, so hat man nach der ersten in §. 148 bemerkten Gleichung für die Collineation der Strahlbüschel

$$\sin (e f x x') = \lambda,$$

und wenn die Doppelstrahlen auf einander senkrecht sind:

$$tg\, ex : tg\, ex' = \lambda,$$

oder

$$tg\, ex\; tg\, fx' = \lambda \text{ (m. s. §. 148 I b.).}$$

2) Die Doppelstrahlen können auch imaginär werden und zwar nach den vorstehenden Bemerkungen, sowie nach §. 153 jedesmal, wenn ein Winkel $a^\wedge a'$ von constanter Grösse sich um seinen Scheitel dreht, dessen Schenkel die entsprechenden Strahlen der beiden Büschel mit gemeinschaftlichem Mittelpunkte abgeben. — Uebrigens kann man jedes Büschel mit imaginären Doppelstrahlen als mit einem durch einen constanten Winkel erzeugten perspectivisch ansehen. Denn schneidet man das erstere durch eine beliebige Transversale, so entstehen auf derselben zwei collineare Punktreihen, deren Doppelpunkte imaginär oder diejenigen Punkte der Ebene sind, von welchen aus jeder Abschnitt der Transversale zwischen entsprechenden Punkten oder Strahlen unter constantem Winkel erscheint (§. 153). Dreht man nun dieses zweite System von Strahlen, deren Mittelpunkt einer jener imaginären Doppelpunkte ist, um die Transversale aus der Ebene heraus, verbindet den imaginären Doppelpunkt in dieser Lage mit dem Mittel-

punkte des gegebenen Büschels durch eine Grade, so erscheinen von jedem Punkte dieser Graden aus die Winkel des gegebenen Büschels mit den aus der Ebene herausgehobenen gleichen Winkeln des zweiten Büschels perspectivisch, folglich u. s. w.

3) Entspricht in zwei collinearen concentrischen Strahlbüscheln einem Strahle, mag er dem ersten oder zweiten Büschel zugehörig betrachtet werden, ein und derselbe Strahl, so sind die Strahlen beider Büschel in Involution. Dies lässt sich auf dieselbe Weise darthun, wie es oben §. 155 und 156 bezüglich der involutorischen Theilung einer Graden erwiesen worden ist.

Diese Bedingung ist erfüllt, wenn in den betreffenden Gleichungen, welche die Collineation der concentrischen Büschel ausdrücken, die beiden veränderlichen entsprechenden Strahlen x, x' symmetrisch verbunden vorkommen. Die Involution der concentrischen Strahlbüschel wird daher durch nachstehende Gleichungen angedeutet (s. §. 148):

1) $$\sin(efxx') = -1,$$

wo e, f die Doppelstrahlen der Büschel sind.

2) $$\frac{\sin a^\wedge x}{\sin a'^\wedge x} = \lambda \frac{\sin a' x'}{\sin a x'},$$

wobei a und a' irgend zwei entsprechende Strahlen sind.

3) $$tg\, o^\wedge x \; tg\, o^\wedge x' = \lambda,$$

wenn o einer der beiden zugeordneten zu einander senkrechten Strahlen ist, von welchen immer ein Paar in einem involutorischen Strahlbüschel vorhanden ist (§. 88). Letztere Gleichung entsteht aus der vorhergehenden, wenn man unter a, a' eben dieses senkrechte Strahlenpaar versteht.

4) $$\frac{1}{tg\, a^\wedge x} + \frac{1}{tg\, a'^\wedge x'} = \lambda,$$

wo a, a' zwei beliebige entsprechende Strahlen sind; oder

$$tg\, b^\wedge x + tg\, c' x' = \lambda,$$

wenn b, c' zwei auf den entsprechenden Strahlen a, a' senkrechte Grade sind.

5) $$tg\, a^\wedge x \; tg\, a^\wedge x' + \lambda\,(tg\, a^\wedge x + tg\, a^\wedge x') + \nu = 0,$$

wobei a irgend ein Strahl ist.

Aus dem Satze zu Ende von §. 148 und der Bedingung für die Involution zweier concentrischer Strahlbüschel folgt, dass immer zwei collineare Büschel so auf einander gelegt werden können, dass entsprehende Strahlen involuto-

rische Strahlenpaare abgeben. (§. 159.) Hieraus folgt mit Rücksicht auf §. 88 weiter:

Sind irgend zwei Büschel collinear, so giebt es in dem einen immer zwei auf einander senkrechte Strahlen, deren entsprechende in dem andern Büschel auch auf einander senkrecht sind, und zwar im Allgemeinen nur ein Paar.

Bemerkung. Die Collineation zweier Punktreihen oder Strahlbüschel, für welche die charakteristischen Merkmale und Ausdrücke in dem Vorhergehenden angegeben worden sind, lässt sich auch noch durch eine ganz allgemeine Beziehung wiedergeben, in welcher die entsprechenden Punkte oder Strahlen zu einander stehen: Wenn in zwei Graden, jede als eine Reihe von Punkten betrachtet (in zwei Systemen von durch je einen Punkt gelegten Graden oder Strahlen) ein Punkt der einen Graden (ein Strahl des einen Systems) einem und nur einem Punkte (Strahle) der andern Graden (des andern Systems) entspricht und umgekehrt, so stehen die zusammengehörigen Punkte beider Graden (die zusammengehörigen Strahlen beider Systeme) in collinearer Beziehung. Denn die Beziehung der entsprechenden Punkte (Strahlen) beider Graden (Systeme) muss sich durch eine Gleichung zwischen zwei Veränderlichen wiedergeben lassen, die rein algebraisch oder ohne Beimischung von Transcendenten und den Voraussetzungen gemäss vom ersten Grade für jede Variabele ist, wenn dieselben die Abschnitte (Winkelfunktionen) der entsprechenden Punkte (Strahlen) gegen zwei oder einem festen Punkt (Strahl) bedeuten. Solchen Bedingungen entsprechen aber die für die Collineation bezeichnenden Gleichungen:

$$AX \,.\, B'X' + \lambda AX + \mu B'X' + \nu = 0 \quad (§. 146)$$

und

$$tg\, a^\wedge x \; tg\, b'^\wedge x' + \lambda\, tg\, a^\wedge x + \mu\, tg\, b'^\wedge x' + \nu = 0 \quad (1 \text{ u. } §. 148, 3).$$

Diese allgemeine Eigenschaft collinearer Systeme von Punkten, die in einer Graden liegen, oder von Strahlen, die durch einen Punkt gehen, wird sich auch wieder finden bei der Collineation der Systeme von Punkten und Graden, welche in einer Ebene enthalten sind.

Collineation ebener Figuren.

§. 161.

Wie bereits in §. 134 bemerkt worden ist, sollen zwei Systeme von Punkten und Graden in einer Ebene collinear heissen, wenn Punkte den Punkten und Grade den Graden in beiden Systemen sich so entsprechen, dass je vier in einer Graden liegende Punkte sowie je vier in einem Punkte sich schneidende Grade des einen

Systems dasselbe Doppelverhältniss geben, wie die vier entsprechenden ebenfalls in einer Graden liegenden Punkte, sowie die vier entsprechenden und auch durch einen Punkt gehenden Graden des andern Systems. Es kommt zunächst darauf an, nachzuweisen, dass dieser aufgestellten Definition auch ebene Figuren entsprechen können. Dieses wird sich aus nachstehender allgemeinen Construction collinearer Figuren ergeben:

Seien ABC, $A'B'C'$ zwei beliebige Dreiecke, X ein beliebiger oder veränderlicher Punkt in der Ebene des ersteren; zieht man nach demselben von A und B aus die beiden Graden AX, BX, welche die Seiten CB in $\mathfrak{A}$, CA in $\mathfrak{B}$ treffen und dadurch die Verhältnisse $\mathfrak{A}C:\mathfrak{A}B$, $\mathfrak{B}C:\mathfrak{B}A$ bestimmen — und nimmt man auf den Seiten $C'B'$ und $C'A'$ des andern Dreiecks zwei Punkte $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$ dergestalt, dass

a) $$\frac{\mathfrak{A}C}{\mathfrak{A}B} = \lambda \frac{\mathfrak{A}'C'}{\mathfrak{A}'B'}, \quad \frac{\mathfrak{B}C}{\mathfrak{B}A} = \mu \frac{\mathfrak{B}'C'}{\mathfrak{B}'A'}$$

ist, wobei λ und μ zwei Constanten sind, zieht hierauf die Graden $A'\mathfrak{A}'$, $B'\mathfrak{B}'$, welche sich in X' schneiden: so ist das System aller so bestimmten Punkte X' **collinear** dem von den Punkten X gebildeten, d. h. 1) liegen vier Punkte X in einer Graden, so ist dasselbe auch der Fall mit den vier entsprechenden Punkten X' und das Doppelverhältniss der vier Punkte X ist dem der vier entsprechenden X' gleich. 2) Gehen ferner vier Grade x oder $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ in der ersten Figur durch einen und denselben Punkt, so ist dies auch der Fall mit den entsprechenden vier Graden x' oder $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ der zweiten Figur und das Doppelverhältniss der vier ersten Graden ist dem der vier letzteren gleich.

Beweis. 1) Zunächst ist leicht zu erweisen, dass wenn der Voraussetzung gemäss der veränderliche Punkt X eine Grade beschreibt, die denselben bestimmenden veränderlichen Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ einer Relation des ersten Grades genügen von der Form

b) $$\alpha \frac{\mathfrak{A}C}{\mathfrak{A}B} + \beta \frac{\mathfrak{B}C}{\mathfrak{B}A} = \gamma$$

und dass umgekehrt die Gleichung b) hinreichend die Lage der durch sie bestimmten Punkte X in Einer Graden ausdrückt. Es müssen nämlich vier nach A gezogene Strahlen AX dasselbe Doppelverhältniss bilden, wie vier von denselben Punkten X nach B gerichtete Strahlen, folglich sind auch die auf AC liegenden Punkte $\mathfrak{B}$ collinear den auf BC liegenden Punkten $\mathfrak{A}$.

Diese Collineation der Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ wird aber nach §. 144 III. durch die Gleichung b) ausgedrückt, folglich u. s. w. In leicht ersichtlicher Weise lässt sich auch der Beweis für den umgekehrten Satz umkehren.

Diesem Satze gemäss und nach den Beziehungen a) besteht nun zwischen den Punkten $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$ ebenfalls die Relation

$$\alpha' \frac{\mathfrak{A}'C'}{\mathfrak{A}'B'} + \beta' \frac{\mathfrak{B}'C'}{\mathfrak{B}'A'} = \gamma,$$

folglich liegen die durch $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$ bestimmten Punkte X auch in Einer Graden.

Zugleich geht hieraus hervor, dass, weil das Doppelverhältniss der Punkte X' dem der Punkte $\mathfrak{A}'$ gleich ist, und weil auch nach §. 141 die Doppelverhältnisse der Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ einander gleich sind, dieselbe Gleichheit der Doppelverhältnisse auch zwischen je vier Punkten X und den entprechenden vier Punkten X' stattfindet.

2) Ausserdem ist aus der Gleichung b), wenn sie für die veränderlichen Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ unter denselben Umständen wie unter 1) giltig ist, zu folgern, dass jede durch dieselben Punkte gelegte Grade $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ oder x durch einen und denselben Punkt P geht, und umgekehrt. Denn da die Gleichung b) die Collineation der Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ausdrückt, wobei A und B zwei beliebige, C aber ein sich selbst entsprechender Punkt ist, so ist damit auch die perspectivische Lage der Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ angedeutet, folglich gehen alle Verbindungsgraden $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ entprechender Punkte durch einen und denselben Punkt P (den Projectionspunkt). Wie leicht zu sehen, gilt dieser Satz auch umgekehrt.

Setzt man nun voraus, dass die Graden x, welche die CA und CB in den Punkten $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}$ schneiden, durch einen und denselben Punkt P gehen, so findet zwischen den veränderlichen Punkten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, sowie den festen Punkten A, B, C die Beziehung b) statt und wegen a) besteht dieselbe Beziehung auch zwischen $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ und A', B', C', folglich gehen auch alle Graden $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ oder x' durch einen und denselben Punkt P'. Da endlich nach a) auch die Doppelverhältnisse von je vier Punkten $\mathfrak{A}$ den Doppelverhältnissen von den entsprechenden vier Punkten $\mathfrak{A}'$ gleich sind, so bestehen auch zwischen je vier Strahlen x und den entsprechenden vier Strahlen x' gleiche Doppelverhältnisse.

§. 162.

Unendlich entfernte Punkte und Grade der collinearen Figuren. Setzt man den veränderlichen Punkt X der einen Figur immer als einen unendlich entfernten in der Ebene voraus, insofern man denselben eine unendlich entfernte Grade u beschreiben lässt, so sind die Graden AX, BX fortwährend parallel und bestimmen auf den Graden CA und CB die veränderlichen Abschnitte $C\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}A$ und $C\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}B$, welche, wie leicht zu erweisen, an die Relation

$$\frac{C\mathfrak{B}}{A\mathfrak{B}} + \frac{C\mathfrak{A}}{B\mathfrak{A}} = 1$$

geknüpft sind, d. h. die Constanten $\frac{\alpha}{\gamma}$ und $\frac{\beta}{\gamma}$ der Gleichung b) sind für diesen Fall der Einheit gleich. Die durch die entsprechenden Punkte x' bestimmte Grade i der collinearen Figur, für welche die Beziehungen a) gelten, wird nun durch die Gleichung

$$\lambda \frac{C'\mathfrak{A}'}{B'\mathfrak{A}'} + \mu \frac{C'\mathfrak{B}'}{A'\mathfrak{B}'} = 1$$

bestimmt, ist also keine unendlich entfernte Grade der Ebene, d. h.

Den in unendlicher Entfernung liegenden Punkten der einen Figur entsprechen im Allgemeinen die Punkte einer endlich liegenden Graden der andern Figur.

Wenn daher i die Grade der ersten Figur ist, welche den unendlich fernen Punkten der zweiten entspricht, und i' die Grade der zweiten, welche den unendlich fernen Punkten der ersten entspricht, so werden zwei parallelen Graden der zweiten Figur zwei sich auf der Graden i schneidende also im Allgemeinen **nicht** parallele Grade der ersten Figur entsprechen und ebenso liegen auf i' Durchschnitte von Graden der zweiten Figur, welche parallelen Graden der ersten Figur entsprechen. Man nennt die Graden i und i' die Gegenaxen der resp. ersten und zweiten Figur. Die beiden unendlich fernen Punkte der Gegenaxen i und i' müssen sich nun nach dem Vorhergehenden ebenfalls entsprechen, denn der unendlich entfernte Punkt U' von i' entspricht einem gewissen Punkte von i, der aber der unendlich entfernte U auf dieser Graden sein muss, weil er einem Punkte der i' entspricht.

Daraus folgt weiter: eine Parallele x zur Gegenaxe i in der ersten Figur entspricht wieder einer Parallelen x' zur Gegenaxe

i' in der zweiten Figur, denn der Durchschnittspunkt $i \cdot x$ ist der unendlich ferne Punkt auf i und entspricht dem unendlich fernen Punkte auf i', d. h. die beiden Graden i' und x' haben einen unendlich fernen Durchschnittspunkt oder sind parallel. Diese Parallelen zu den Gegenaxen x und x' müssen, weil ihre unendlich fernen Punkte entsprechende sind, von den übrigen in ihnen liegenden entsprechenden Punkten ähnlich oder proportional getheilt werden. (§. 142.)

§. 163.

Geometrische Bedeutung der Constanten λ und μ der Gleichung a) in §. 161 und Folgerungen. Hat man die drei Punkte A', B', C' der zweiten Figur als drei Punkten A, B, C der ersten entsprechende angenommen, und man setzt ausserdem fest, dass noch irgend zwei Punkte D' und D einander entsprechen sollen, so sind, wenn man D und D' für die Punkte X und X' einsetzt, die Verhältnisse

$$\frac{C\mathfrak{B}}{A\mathfrak{B}} : \frac{C'\mathfrak{B}'}{A'\mathfrak{B}'} = \lambda, \qquad \frac{C\mathfrak{A}}{B\mathfrak{A}} : \frac{C'\mathfrak{A}'}{B'\mathfrak{A}'} = \mu$$

festgesetzt, und es wird dann zu jedem andern X der ersten Figur der entsprechende X' der andern bestimmt werden können. Hieraus geht hervor, dass man, um zu einer gegebenen Figur eine zweite collineare zu construiren, die vier bestimmten Punkten A, B, C, D der ersten entsprechenden vier Punkte A', B', C', D' der zweiten Figur beliebig annehmen kann. Nur dürfen dabei keine drei gegebenen Punkte in grader Linie liegen, weil dann nur einer der Coefficienten λ, μ sich bestimmen lässt. Liegen z. B. D und D' auf den Graden AC, $A'C'$, so fallen auch die Graden $A\mathfrak{A}$ und $A'\mathfrak{A}'$ mit AC und $A'C'$ zusammen, und es lässt sich blos der erstere Coefficient

$$\lambda = \frac{C\mathfrak{B}}{A\mathfrak{B}} : \frac{C'\mathfrak{B}'}{A'\mathfrak{B}'} = \frac{CD}{AD} : \frac{C'D'}{AD'}$$

durch Abschnitte zwischen den zweimal vier entsprechenden Punkten angeben.

2) Sind D_1 und D_2 die Durchschnittspunkte der Graden x, deren Punkte der Gleichung b) genügen, mit den Graden CA und CB, haben D_1' und D_2' dieselbe Bedeutung für die collineare Figur $A'B'C'$ und x', so sind die Collineationscoefficienten λ und μ in a) bestimmt; man hat für dieselben

$$\lambda = \frac{CD_1}{AD_1} : \frac{C'D_1'}{A'D_1'} \quad \text{und} \quad \mu = \frac{CD_2}{BD_2} : \frac{C'D_2'}{B'D_2'}.$$

Daraus folgt, dass man auch statt vier Punkte, drei (nicht in grader Linie liegende) Punkte und eine Grade in der einen Figur beliebigen drei (nicht in einer Graden liegenden) Punkten und einer Graden entsprechend setzen kann.

Statt der drei erstgenannten Punkte können leicht begreiflicher Weise auch drei Grade gesetzt werden, folglich können auch zur Construction einer collinearen Figur beliebige vier Grade beliebigen vier Graden der gegebenen Figur entsprechend gesetzt werden. Nur dürfen dabei nicht drei dieser vier Graden durch einen Punkt gehen.

Dagegen kann man nicht zwei Punkte A', B' und zwei Grade c', d' beliebigen zwei Punkten A, B und beliebigen zwei Graden c, d entsprechend annehmen. Denn schneiden die Graden c', d' die Grade $A'B'$ in C', D', ebenso c, d die AB in C, D, so würden bei solcher Annahme die vier in grader Linie liegenden Punkte A, B, C, D den ebenfalls in einer Graden enthaltenen A', B', C', D' collinear entsprechend oder $(ABCD) = (A'B'C'D')$ zu nehmen sein, was bei beliebiger Wahl von A', B', c', d' nicht immer der Fall sein kann. Mit dem Entsprechen dieser vier von einander unabhängigen Elemente, nämlich zweier Punkte und zweier Graden der einen Figur und der gleichartigen vier Elemente der andern Figur ist also schon die Collineation der beiden Figuren anticipirt.

§. 164.

Metrische Verhältnisse an collinearen Figuren. Die bezüglichen Relationen entspringen aus der Definition der collinearen Figuren (§. 161), aus welcher unmittelbar hervorgeht, dass auf entsprechenden Graden die entsprechenden Punkte collineare Punktreihen und die durch zwei entsprechende Punkte gehenden entsprechenden Strahlen collineare Strahlbüschel bilden.

Sind also D_1, D_2 zwei feste, X ein veränderlicher Punkt einer Graden in der ersten Figur, D_1', D_2' und X' die entsprechenden Punkte der collinearen Figur, so hat man nach §. 141

$$\frac{D_1X}{D_2X} = k \frac{D_1'X'}{D_2'X'},$$

sowie auch alle übrigen daraus abzuleitenden Relationen für collineare Punktreihen. Desgleichen, sind d_1, d_2 zwei feste, x eine ver-

änderliche Grade der ersten Figur, welche sämmtlich durch einen festen Punkt S gehen, und sind d_1', d_2', x' die entsprechenden Graden der collinearen Figur, welche durch den entsprechenden Punkt S' gehen müssen, so hat man nach §. 148

$$\frac{\sin d_1{}^\wedge x}{\sin d_2{}^\wedge x} = k \frac{d_1'{}^\wedge x'}{d_2'{}^\wedge x'},$$

und alle übrigen für collineare Büschel geltenden Relationen.

2) Sind nun x und x' zwei entsprechende Grade, A, B und A', B' zwei Paare entsprechender Punkte in zwei collinearen Figuren und schneidet AB die x in X, $A'B'$ die x' in X', so hat man

$$\frac{AX}{BX} = k \frac{A'X'}{B'X'}$$

weil aber das Verhältniss $AX : BX$ auch gleich dem Verhältnisse der Abstände p und q der Punkte A und B von der Graden x, und dasselbe auch bezüglich des Verhältnisses $A'X' : B'X'$ und des der Abstände p' und q' der Punkte A' und B' von x' stattfindet, so hat man auch

$$\frac{p}{q} = k \frac{p'}{q'}$$

d. h. in collinearen Figuren ist das Verhältniss zwischen dem Verhältnisse der Entfernungen zweier Punkte von einer Graden der einen Figur und dem gleichgebildeten Verhältnisse der Entfernungen der beiden entprechenden Punkte von der entsprechenden Graden der andern Figur ein constantes.

3) Sind wieder a, b zwei feste, x eine veränderliche Grade, welche durch einen und denselben Punkt gehen, und X ein anderer Punkt auf x und gilt dasselbe für die entsprechenden Graden a', b', x' sowie für den entsprechenden Punkt X' der collinearen Figur, so ist das Verhältniss $\sin a^\wedge x : \sin b^\wedge x$ gleich dem Verhältnisse der Entfernungen $p : q$ des Punktes X von den Graden a und b, und ebenso ist $\sin a'^\wedge x' : \sin b'^\wedge x' = p' : q'$, wenn p' und q' die Entfernungen des Punktes X' von a' und b' sind; man hat demnach auch

$$\frac{p}{q} = k \frac{p'}{q'},$$

d. h. in collinearen Figuren ist das Verhältniss zwischen dem Verhältnisse der Entfernungen eines Punktes von zwei Graden und dem gleichgebildeten Ver-

hältnisse des entsprechenden Punktes von den entsprechenden Graden ein constantes.

Hieraus fliessen folgende Definitionen collinearer Figuren:

Zwei Figuren sind collinear, wenn die Graden der einen denen der andern dergestalt entsprechen, dass die Verhältnisse der Entfernungen einer jeden Graden von drei festen Punkten in der einen Figur zu den Verhältnissen der Entfernungen der entsprechenden Graden von drei festen Punkten der andern Figur in constanten Verhältnissen stehen; oder:
wenn die Punkte der einen Figur denen der andern dergestalt entsprechen, dass die Verhältnisse der Entfernungen eines jeden Punktes von drei festen Graden der einen Figur zu den Verhältnissen der Entfernungen des entsprechenden Punktes von drei festen Graden der andern Figur in constanten Verhältnissen stehen.

§. 165.

Flächenrelationen an collinearen Figuren. Die §. 161 gegebene allgemeine Construction collinearer Figuren zeigte, dass die Punkte und Grade solcher Figuren einander auch dergestalt entsprechen, dass, wenn in der einen Figur drei Punkte in einer Graden, oder drei Grade durch einen Punkt gehen, dasselbe auch mit den entsprechenden Punkten oder Graden der collinearen Figur der Fall ist. Daraus folgt, dass der Durchschnittspunkt zweier Graden der einen Figur dem Durchschnittspunkte der entsprechenden Graden der andern Figur entspricht, sowie auch die Verbindungsgraden zweier Punkte der einen Figur der Verbindungsgraden der entsprechenden Punkte der andern.

Sind nun A, B, C, D, E, F sechs beliebige Punkte der einen Figur und A', B', C', D', E', F' die entsprechenden der collinearen Figur, sind M und N die Durchschnittspunkte der Graden AB mit resp. CD und EF, ebenso M und N' die Durchschnittspunkte von $A'B'$ mit $C'D'$ und $E'F'$, so sind bei vorausgesetzter Collineation beider Systeme die Doppelverhältnisse von vier in grader Linie liegenden Punkten in dem einem Systeme denen der entsprechenden Punkte in dem andern gleich, also z. B.

$$(ABMN) = (A'B'M'N'),$$

Nun hat man auch mit Rücksicht auf §. 22 allgemein

$$AM : BM = \triangle ACM : BCM$$
$$= \triangle ADM : BDM$$

mithin

$$AM : BM = ACD : BCD = ACD : CDB,$$

ebenso

$$AN : BN = AEF : BEF = AEF : EFB,$$

folglich $(ABMN)$ oder

$$\frac{AM}{MB} : \frac{AN}{NB} = \frac{ACD}{CDB} : \frac{AEF}{EFB}.$$

Aus der Gleichheit der erstgenannten Doppelverhältnisse ergiebt sich also die Flächenrelation

$$\frac{ACD}{CDB} : \frac{AEF}{EFB} = \frac{A'C'D'}{C'D'B'} : \frac{A'E'F'}{E'F'B'},$$

d. h. Werden irgend sechs Punkte $A, B, \ldots F$ einer Figur dergestalt zu vier Dreiecken verbunden, dass zwei Punkte (A, B) die Spitzen, und zwei gradlinige Abschnitte (CD, EF), welche je zwei der übrigen vier Punkte verbinden, die Grundlinien dieser Dreiecke abgeben, so ist das Doppelverhältniss zwischen diesen vier Dreiecken

$$\frac{ACD}{CDB} : \frac{AEF}{EFB}$$

dem gleich gebildeten Doppelverhältnisse aus den entsprechenden sechs Punkten $A', B' \ldots F'$ der collinearen Figur gleich.

Das Doppelverhältniss zwischen den Flächen der bezeichneten Dreiecke lässt sich symbolisch sehr einfach dadurch andeuten, dass man die Spitzen A, B der vier Dreiecke zuerst, und die beiden Grundlinien CD, EF in einem ähnlichen Ausdrucke zusammenstellt, wie die Punkte, zwischen denen die Abschnitte zu einem Doppelverhältnisse zusammengesetzt werden, nur dass man in gegenwärtigem Falle die verschiedenen einzelnen Elemente des Ausdrucks zur Vermeidung von Verwechselungen durch irgend ein Zeichen (Komma) von einander gesondert hält. Somit kann

$$\frac{ACD}{CDB} : \frac{AEF}{EFB}$$

kürzer durch

$$(A, B, CD, EF)$$

angedeutet werden. Derselbe Ausdruck kann auch dienen, das Doppelverhältniss $(ABMN)$, welches dem der genannten Dreiecksflächen gleich ist, anzudeuten, insofern M und N die Durchschnittspunkte der Graden AB, (deren Endpunkte im Ausdrucke (A, B, CD, EF) einzeln angegeben

sind) mit den beiden andern Graden CD und EF sind. So wird auch (A, C, BD, EF) entweder das Doppelverhältniss $\frac{ABD}{BDC} : \frac{AEF}{EFC}$ oder das demselben gleiche der vier Punkte A, C, P, Q bedeuten, wenn P und Q die Durchschnittspunkte der Graden AC mit den Graden BD und EF sind. *)

§. 166.

Construction collinearer Figuren. Die in §. 161 bemerkte allgemeine Construction collinearer Figuren lässt sich in etwas anderer Weise noch angeben, welche directer auf die Gleichheit der Doppelverhältnisse von je vier in grader Linie liegenden Punkten in beiden Figuren gegründet ist, während diese Eigenschaft collinearer Figuren bei der oben gezeigten Construction in den Verhältnissen der Coefficienten α und β implicite ausgedrückt ist.

Sind A, B, C, D vier Punkte einer Figur, von denen keine drei in einer Graden liegen, desgleichen A', B', C', D' die vier entsprechenden Punkte einer derselben collinearen Figur, und soll zu einem fünften X der ersten der entsprechende X' der zweiten construirt werden, so nehme man zwei Grade z. B. CA und CB der einen und die entsprechenden $C'A'$ und $C'B'$ der andern Figur als Axen, und bemerke die Durchschnittspunkte der durch die übrigen Punkte bestimmten Graden mit diesen Axen, also für DA und DB mit resp. CB und CA, ebenso in der andern Figur die entsprechenden Durchschnittspunkte. Wird nun

$DA \cdot CB$ mit $\mathfrak{A}$, $DB \cdot CA$ mit $\mathfrak{B}$
$D'A' \cdot C'B'$ „ $\mathfrak{A}'$, $D'B' \cdot C'A'$ „ $\mathfrak{B}'$
$XA \cdot CB$ „ $\mathfrak{X}$, $XB \cdot CA$ „ $\mathfrak{Y}$
$X'A' \cdot C'B'$ „ $\mathfrak{X}'$, $X'B' \cdot C'A'$ „ $\mathfrak{Y}'$

bezeichnet, so muss in Folge der geforderten Collineationsverwandtschaft

$$(CB\mathfrak{A}\mathfrak{X}) = (C'B'\mathfrak{A}'\mathfrak{X}')$$

und

$$(CA\mathfrak{B}\mathfrak{Y}) = (C'A'\mathfrak{B}'\mathfrak{Y}')$$

sein. Man bestimme also auf der Axe $C'B'$ einen Punkt $\mathfrak{X}'$ und auf der Axe $C'A'$ einen Punkt $\mathfrak{Y}'$, so dass diesen Forderungen Genüge geschieht (§. 140), und ziehe die Graden $\mathfrak{X}'A'$ und $\mathfrak{Y}'B'$,

---

*) Moebius: Baryc. Calc. §. 190 u. 221. 2.

welche sich in X' schneiden werden. Denn X liegt mit $\mathfrak{X}$, A auf Einer Graden, folglich X' mit $\mathfrak{X}'$, A'; desgleichen liegt X mit $\mathfrak{Y}$, B auf Einer Graden, folglich X' mit $\mathfrak{Y}'$, B'; mithin ist X' der Durchschnitt von $\mathfrak{X}'A'$ und $\mathfrak{Y}'B'$.

Collinear (perspectivisch) liegende Figuren.

§. 167.

Lehrsatz. Wenn zwei Dreiecke ABC, $A'B'C'$ eine solche Lage haben, dass die Verbindungsgraden AA', BB', CC' je zweier (entsprechender) Ecken in **Einem Punkte** P sich schneiden, so liegen die Durchschnitte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ je zweier (entsprechender) Seiten BC und $B'C'$, CA und $C'A'$, AB und $A'B'$ auf einer und derselben Graden p.

Denkt man nämlich zuerst die Grade $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ gezogen, welche die AA', BB', CC' resp. in den Punkten A_1, B_1, C_1 schneide, so ist zu beweisen, dass der Durchschnittspunkt $\mathfrak{C}$ in der Graden $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ liegt. Nun ist, wenn $\mathfrak{A}$ als Strahlenmittelpunkt betrachtet wird,

$$(CC'C_1P) = (BB'B_1P);$$

und wenn $\mathfrak{B}$ als Strahlenmittelpunkt genommen wird,

$$(CC'C_1P) = (AA'A_1P),$$

folglich

$$(BB'B_1P) = (AA'A_1P);$$

daher sind wegen des selbstentsprechenden Durchschnittspunktes P die Punkte B, B', B_1 mit A, A', A_1 perspectivisch, mithin gehen die Graden AB, $A'B'$, A_1B_1 oder $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ durch einen und denselben Punkt $\mathfrak{C}$.

Der Lehrsatz gilt auch umgekehrt. Denn liegen nach der Voraussetzung $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ in einer Graden, so kann man auch sagen, dass die Verbindungsgraden AB, $A'B'$, $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ der Dreiecke $AA'\mathfrak{B}$ und $BB'\mathfrak{A}$ sich in einem Punkte $\mathfrak{C}$ schneiden, folglich liegen die Durchschnittspunkte P, C', C entsprechender Seiten AA' und BB', $A\mathfrak{B}$ und $B'\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}A$ und $\mathfrak{A}B$ in Einer Graden, d. h. AA', BB' und CC' gehen durch denselben Punkt P.

§. 168.

Erklärungen und Zusätze. 1) Die Dreiecke oder überhaupt zwei Figuren, deren entsprechende Seiten sich in Punkten schneiden, welche in grader Linie liegen, oder bei denen die Verbindungsgraden entsprechender Ecken durch denselben Punkt gehen, heissen **collinear liegende** Dreiecke oder Figuren (homologe Dreiecke, *figures homologiques* nach Chasles). Der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt der die entsprechenden Ecken verbindenden Graden heisst das Collineationscentrum (Mittelpunkt der Homologie) und die Grade, welche die Durchschnittspunkte entsprechender Seiten enthält, die Collineationsaxe (Axe der Homologie).

Aus den gegebenen Definitionen, sowie aus den Sätzen des vorigen §. ergiebt sich ohne Weiteres, dass die Collineationsaxe diejenige Grade ist, in welcher die beiden Figuren gemeinschaftlichen und sich selbst entsprechenden Punkte liegen; denn sie sind die Durchschnittspunkte entsprechender Graden (§. 161 u. 165). Aus gleichem Grunde ist auch das Collineationscentrum ein Punkt, welcher als beiden Figuren zugleich angehörend sich selbst entspricht.

2) Die beiden auf die collinear liegenden Dreiecke ABC, $A'B'C'$ bezüglichen Sätze des vorhergehenden §. lassen sich auch wie folgt ausdrücken:

Bewegen sich die Ecken eines veränderlichen Dreiecks ABC in drei festen Graden AA', BB', CC', welche durch Einen Punkt P gehen, und drehen sich dabei zwei Seiten, wie BC, CA um zwei feste Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, so geht auch die dritte Seite AB beständig durch einen und denselben Punkt $\mathfrak{C}$, welcher mit den beiden $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ in Einer Graden liegt.

Drehen sich die Seiten BC, CA, AB eines veränderlichen Dreiecks um drei feste Punkte resp. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, welche in Einer Graden liegen, und bewegen sich zwei Ecken A und B in zwei festen Graden AA', BB', so bewegt sich auch die dritte Ecke C in einer Graden CC', welche durch den Durchschnittspunkt P der beiden ersteren AA', BB' geht.

3) Die Construction collinear liegender Figuren ergiebt sich nach den vorstehenden Erklärungen in 1) sehr einfach und besteht wesentlich im blosen Ziehen grader Linien.

Ist die Collineationsaxe p und das Collineationscentrum P für zwei solche Figuren gegeben, so braucht man nur noch zwei entsprechende Punkte A und A' zu kennen, um zu jedem andern Punkte X der einen Figur den entsprechenden X' der andern zu bestimmen.

Zieht man nämlich die Grade AX, welche die Axe p in dem Punkte $\mathfrak{X}$ trifft, ferner die PX und $A'\mathfrak{X}$, so schneiden sich die beiden letztgenannten Graden in dem Punkte X'. Eine jede Grade der zweiten Figur findet man, wenn zwei ihrer Punkte, die zweien der ersten Figur entsprechen, gegeben sind; einer dieser Punkte kann derjenige sein, in welchem die entsprechende Grade der ersten Figur die Collineationsaxe trifft.

Sind die Collineationsaxe und zwei entsprechende Punkte A' und B' der zweiten Figur gegeben, die den Punkten A und B der ersten entsprechen, so findet man zu dem Punkte X den entsprechenden X', wenn man zwei Grade zieht, welche sich um die Punkte A', B' drehen und die Graden AX, BX auf der Axe p in den Punkten $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$ treffen. Der Durchschnittspunkt von $\mathfrak{X}_1 A'$ und $\mathfrak{X}_2 B'$ ist der gesuchte Punkt X'.

Hierbei ist allerdings bezüglich der gegebenen Stücke vorausgesetzt, dass die Graden AB und $A'B'$ sich in einem Punkte $\mathfrak{C}$ auf der gegebenen Collineationsaxe schneiden, Bei vollständiger Allgemeinheit der Aufgabe darf also die Collineationsaxe nur durch eins der Bestimmungselemente für die Lage einer Graden, d. h. etwa nur ihrer Richtung nach, oder nur durch einen Punkt M, durch welchen sie gehen soll, oder durch ein anderes, dieses eine Bestimmungsstück vertretendes, Element gegeben sein.

Sind für die collinear liegenden Figuren das Collineationscentrum P, und zwei Grade a', b' der zweiten Figur gegeben, welche zweien Graden a, b der ersten entsprechen sollen, und soll zu einem Punkte X der ersten der entsprechende X' der andern gefunden werden, so lege man durch die Punkte $a{\cdot}a'$ oder $\mathfrak{A}$, $b{\cdot}b$ oder $\mathfrak{B}$ die Grade $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, welche die Collineationsaxe p ist; zieht man dann die Grade XC, wenn C den Punkt $a{\cdot}b$ vorstellt, welche die p in $\mathfrak{X}$ trifft, und hierauf die $\mathfrak{X}C'$, wenn C' der Punkt $a'{\cdot}b'$ ist, so treffen sich $\mathfrak{X}C'$ und XP im Punkte X'. Nothwendig ist hierbei, dass P auf der CC' liegt; es ist somit eine der vier Graden a, a', b, b' hinsichtlich eines ihrer Bestimmungsstücke z. B. des Punktes C oder C', nicht mehr willkürlich anzunehmen.

4) Allgemein lassen sich zwei collinear liegende Figuren auf

folgende Weise construiren: Wenn in der Ebene der gegebenen Figur noch ein Punkt P und eine Grade p gegeben ist, und man zieht von P nach irgend einem Punkte X der gegebenen Figur die Grade PX, welche die p in dem Punkte $\mathfrak{P}$ trifft, bestimmt hierauf in derselben Graden PX einen Punkt X', welcher der Relation

$$\frac{PX}{PX'} = \lambda \frac{\mathfrak{P}X}{\mathfrak{P}X'},$$

wobei λ eine Constante ist, genügt, so gehört jeder derartig bestimmte Punkt X' zu einer der gegebenen collinear liegenden Figur; für beide Figuren ist der Punkt P das Centrum, und p die Axe der Collineation.

In beiden Figuren gehen nämlich die Verbindungsgraden XX' entsprechender Punkte durch denselben Punkt P, es ist also noch zu beweisen, dass auch die entsprechenden Graden sich auf derselben Graden p der Collineationsaxe schneiden. Sind X_1, X_2 zwei Punkte der ersten, X_1', X_2' die entsprechenden der andern Figur, so hat man nach den Constructionsbedingungen:

$$\frac{PX_1}{PX_1'} = \lambda \frac{\mathfrak{P}_1X_1}{\mathfrak{P}_1X_1'} \text{ und } \frac{PX_2}{PX_2'} = \lambda \frac{\mathfrak{P}_2X_2}{\mathfrak{P}_2X_2'},$$

folglich

$$(P\mathfrak{P}_1X_1X_2) = (P\mathfrak{P}_2X_1'X_2') = \lambda.$$

Wegen des selbstentsprechenden Punktes P sind aber die Punkte der beiden gleichen Doppelverhältnisse perspectivisch, folglich gehen die Verbindungsgraden $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$, X_1X_2, $X_1'X_2'$ durch einen und denselben Punkt oder die entsprechenden Graden X_1X_2, $X_1'X_2'$ schneiden sich auf der $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ oder p, welche also die Collineationsaxe ist.

Die Constante λ, welche ein für die collineare Lage charakteristischer Coefficient ist, ist somit der einzige, welche die collineare Beziehung beider Figuren feststellt, während für die Collineation im Allgemeinen, ohne Berücksichtigung der gegenseitigen Lage beider Figuren zwei Coefficienten anzunehmen erforderlich war (§. 161). Dieser Einfluss des besondern Lagenverhältnisses collinear liegender Figuren auf deren metrische Beziehungen zu einander geht auch aus folgenden Betrachtungen hervor.

§. 169.

Construction collinear liegender Figuren abgeleitet aus der allgemeinen Construction collinearer Figuren. Setzt man in §. 161 voraus, dass von zwei collinearen

Figuren drei Punkte A, B, C der ersteren mit den entsprechenden drei Punkten A', B', C' der andern zusammenfallen, so gehen die Relationen a) zunächst in folgende über

$$\text{a}') \qquad \frac{\mathfrak{A}C}{\mathfrak{A}B} = \lambda \frac{\mathfrak{A}'C}{\mathfrak{A}'B}; \qquad \frac{\mathfrak{B}C}{\mathfrak{B}B} = \mu \frac{\mathfrak{B}'C}{\mathfrak{B}'B};$$

in welcher die Constanten λ und μ beliebige Werthe haben. Die beiden nach diesen Relationen auf einander bezogenen collinearen Figuren haben dabei weiter keine Eigenthümlichkeit, als dass drei Punkte der einen mit drei entsprechenden Punkten der andern zusammenfallen. Werden dagegen noch *die beiden Constanten λ und μ in a') einander gleich gesetzt, so liegen die Figuren auch collinear*; der Punkt C ist dabei das Collineationscentrum und die Grade AB die Collineationsaxe. Denn nach dieser Annahme gehen die Relationen a') über in

$$\frac{\mathfrak{A}C}{\mathfrak{A}B} : \frac{\mathfrak{A}'C}{\mathfrak{A}'B} = \frac{\mathfrak{B}C}{\mathfrak{B}A} : \frac{\mathfrak{B}'C}{\mathfrak{B}'A},$$

oder

$$(CB\mathfrak{A}\mathfrak{A}') = (CA\mathfrak{B}\mathfrak{B}').$$

Wegen des selbstentsprechenden Durchschnittspunktes C gehen die entsprechenden Verbindungsgraden $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ durch einen Punkt der Graden AB und die Durchschnittspunkte X, X' von $A\mathfrak{B}$ und $B\mathfrak{A}$, $A\mathfrak{B}'$ und $B\mathfrak{A}'$ liegen in einer Graden, welche durch den Punkt C geht (§, 135). Auch genügen die Punkte X, X' der im vorhergehenden §. bemerkten Constructionsweise collinear liegen- Figuren. Denn wenn $\mathfrak{P}$ der Durchschnitt der Graden CXX' mit AB ist, so hat man

$$\frac{XC}{X\mathfrak{P}} : \frac{X'C}{X'\mathfrak{P}} = \frac{\mathfrak{A}C}{\mathfrak{A}B} : \frac{\mathfrak{A}'C}{\mathfrak{A}'B} = \lambda,$$

mithin C das Centrum und AB die Axe der Collineation.

§. 170.

Metrische Relationen bei collinear liegenden Figuren. Zu den allgemeinen Beziehungen, welche zwischen beliebig gelegenen collinearen Figuren stattfinden, treten bei den collinear *liegenden* noch besondere, welche eben aus dem besondern Lagenverhältniss hervorgehen, und von denen einige bereits in den vorhergehenden §§. erwähnt worden sind.

1) Bezeichnen i, i' wieder die Gegenaxen oder die Graden in der ersten und zweiten Figur, welche resp. der unendlich entfernten

Graden der zweiten und ersten entsprechen, ferner p die Collineationsaxe beider Figuren, so sind i, i' und p einander parallel. Denn die Gegenaxe i und die unendlich ferne Grade der zweiten Figur schneiden sich auf der Collineationsaxe und ebenso schneidet die unendlich ferne Grade die Gegenaxe i' auf der Collineationsaxe p, folglich liegen die unendlich fernen Punkte von i und i' auf p oder die Gegenaxen sind der Collineationsaxe parallel.

Trifft ferner irgend ein Strahl PXX' vom Collineationscentrum nach irgend einem Punkte X der einen Figur oder nach beiden entsprechenden Punkten (§. 168) die Gegenaxen i, i' in den Punkten J, J' und die Collineationsaxe p in $\mathfrak{P}$, so hat man zunächst (§. 168, 4)

$$(P\mathfrak{P}XX') = \lambda,$$

und von dieser Constante hängen auch die gegenseitigen Entfernungen von P, i, i' und p ab. Denn ist U der unendlich ferne Punkt der Graden PXX', so ist

$$(P\mathfrak{P}JU) = (P\mathfrak{P}UJ') = \lambda,$$

oder, weil $PU : U\mathfrak{P} = -1$,

$$1) \quad \begin{cases} PJ : \mathfrak{P}J = \mathfrak{P}J' : PJ' = \lambda, \\ PJ \,.\, PJ' = \mathfrak{P}J \,.\, \mathfrak{P}J'. \end{cases}$$

Hieraus ergiebt sich, dass der Mittelpunkt von JJ' mit dem von $P\mathfrak{P}$ zusammenfällt, oder dass die Entfernung des Punktes J von P der des Punktes J' von $\mathfrak{P}$ gleich aber entgegengesetzt ist. Aus obiger Proportion folgt nämlich unmittelbar auch

$$PJ - \mathfrak{P}J : \mathfrak{P}J' - PJ' = PJ : \mathfrak{P}J' = \mathfrak{P}J : PJ',$$

oder

$$P\mathfrak{P} : \mathfrak{P}P = PJ : \mathfrak{P}J' = \mathfrak{P}J : PJ'.$$

Daraus geht weiter hervor, dass überhaupt die Entfernung der Gegenaxe i oder i' vom Collineationsmittelpunkte P gleich aber entgegengesetzt ist dem Abstande der Gegenaxe i' oder i von der Collineationsaxe.

Dasselbe Ergebniss folgt auch schon daraus, dass die entsprechenden Punkte X, X' auf der Graden $P\mathfrak{P}$ zwei collineare Theilungen, deren Doppelpunkte P und $\mathfrak{P}$ sind, bilden, folglich fällt nach §. 150, 1 die Mitte der Punkte J, J' mit der von $P\mathfrak{P}$ zusammen.

2) Seien in zwei collinear liegenden Systemen x_1, x_2 zwei bestimmte Grade und Y irgend ein Punkt des einen, x_1', x_2' und Y' die entsprechenden Elemente des andern Systems. Man denke sich ferner von Y auf x_1 und x_2 die Senkrechten YX_1, YX_2 und ebenso von Y' auf x_1', x_2' die Senkrechten $Y'X_1'$, $Y'X_2'$ gefällt, so stehen schon

wegen der collinearen Beziehung beider Systeme diese Senkrechten in constantem Doppelverhältnisse, wie auch die Graden x_1, x_2 und der Punkt Y gewählt sein mögen (§. 164, 2), d. h.

2) $$\frac{YX_1}{YX_2} : \frac{Y'X_1'}{Y'X_2'} = \lambda.$$

a) Ist nun die eine Grade x_1 durch den Collineationsmittelpunkt P gezogen, so fällt sie mit ihren entsprechenden x_1' zusammen und es ist

$$\frac{YX_1}{Y'X_1'} = \frac{PY}{PY'},$$

mithin

3) $$\frac{PY}{PY'} : \frac{YX_2}{Y'X_2'} = \lambda.$$

In zwei collinear liegenden Figuren ist also das Verhältniss zwischen dem Verhältnisse der Abstände zweier entsprechenden Punkte (Y, Y') von dem Collineationscentrum und dem Verhältnisse der Abstände derselben Punkte von zwei entsprechenden Graden (x_2, x_2') ein constantes.

Nimmt man weiter an, dass x_2 die Collineationsaxe sei, so fällt ihre entsprechende x_2' gleichfalls mit ihr zusammen, und man hat $YX_2 : Y'X_2' = Y\mathfrak{P} : Y'\mathfrak{P}$, mithin

$$\frac{PY}{PY'} : \frac{\mathfrak{P}Y}{\mathfrak{P}Y'} = \lambda,$$

welches die in §. 168, 4 bereits bemerkte Relation ist.

c) Ist x_1 in dem ersten, x_2' in dem zweiten Systeme die unendlich ferne Grade, also x_2 mit i und x_1' mit i' zu vertauschen, und bezeichnet man noch die Senkrechten von Y und Y' auf i und i' oder YX_2 und YX_1' mit YJ und $Y'J'$, so geht die oben bemerkte Gleichung 2) über in

$$YJ \,.\, Y'J' = \lambda';$$

oder das Product der Entfernungen zweier entsprechender Punkte (Y, Y') resp. von den beiden Gegenaxen (i, i') ist constant.

§. 171.

Collineare Involution ebener Figuren. Setzt man in der Gleichung $(P\mathfrak{P}XX') = \lambda$ (§. 168, 4) den Coefficienten λ für die collineare Lage der negativen Einheit gleich, so stehen die entsprechenden Elemente beider Figuren in der besondern Beziehung zu einander, dass jedes derselben in der einen Figur mit dem ent-

sprechenden der andern Figur vertauscht werden kann, ohne dass dabei die collineare Beziehung beider Figuren zu bestehen aufhört, d. h. beide Figuren bilden als ein Ganzes aufgefasst ein involutorisches ebenes System.

Die für dasselbe charakteristische Relation

$$(P\mathfrak{P}XX') = -1$$

lässt sofort erkennen, dass in jeder Graden, welche zwei entsprechende Punkte XX' verbindet, die Punkte P oder das Collineationscentrum und $\mathfrak{P}$, oder der Durchschnitt von XX' mit der Collineationsaxe p die Doppelpunkte einer involutorisicken Punktreihe sind, welche auf der Graden durch die Paare X, X' entsprechender Punkte gebildet werden. (§. 79, 2. 3.)

Somit ist für das involutorische ebene System das Collineationscentrum ein isolirter **Doppelpunkt** und die Collineationsaxe p als Inbegriff aller Punkte $\mathfrak{P}$ eine **Doppellinie** der Involution. Jeder Abstand zweier entsprechen-Punkte eines solchen Systems wird durch den Doppelpunkt und die Doppellinie harmonisch getheilt.

Bezeichnen ferner i und i' die Gegenaxen der beiden zu einem involutorischen Systeme vereinigten Figuren, J, J' die Durchschnittspunkte der Verbindungsgraden XX' zweier entsprechender Punkte mit diesen Axen, so ist nach vorhergehendem §.

$$PJ : \mathfrak{P}J = PJ' : \mathfrak{P}J' = -1,$$

d. h. die beiden Gegenaxen fallen in Eine zusammen, und zwar in eine zur Doppellinie p parallele Grade, welche durch die Mitte des Abstandes des Doppelpunktes P von der Doppellinie p geht und daher (nach Möbius *) die **Mittellinie** genannt werden mag.

Zu denselben Resultaten kommt man auch, wenn man von der collinearen Beziehung zweier Figuren, nach welcher drei Punkten in Einer Graden wieder drei in Einer Graden liegende Punkte entsprechen, ausgeht, und dabei noch voraussetzt, dass jeder Punkt der einen Figur mit seinem entsprechenden der andern vertauscht werden kann. Seien hiernach A, A', B, B' vier Punkte der einen Figur Σ, denen A', A, B', B in der andern Σ' entsprechen sollen, so wird man zu jedem fünften X den entsprechenden X' nach folgenden rein geometrischen Betrachtungen bestimmen können.

*) Berichte der K. S. Gesellschaft d. Wissensch. 1856. S. 143.

Dem Wesen der Collineation zufolge entspricht dem Durchschnittspunkte P von AA' und BB', oder kürzer bezeichnet, dem Punkte $P \equiv AA' \cdot BB'$ der Punkt $A'A \cdot B'B$, d.i. P; desgleichen dem Punkte $AB \cdot A'B' \equiv \mathfrak{L}$ derselbe Punkt $A'B' \cdot AB \equiv \mathfrak{L}$ und dem Punkte $AB' \cdot A'B \equiv \mathfrak{M}$ derselbe $A'B \cdot AB' \equiv \mathfrak{M}$. Jeder der drei Punkte P, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$ ist also ein Doppelpunkt. Legt man durch die selbstentsprechenden Punkte $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$ eine Grade p, so ist auch $\mathfrak{LM} \cdot AA' \equiv \mathfrak{LM} \cdot A'A \equiv \mathfrak{A}$ ein Doppelpunkt und ebenso $\mathfrak{LM} \cdot BB' \equiv \mathfrak{LM} \cdot B'B \equiv \mathfrak{B}$. Aber nicht blos diese, sondern jeder Punkt $\mathfrak{Q}$ der Graden $p \equiv \mathfrak{LMA}$ oder $\mathfrak{LMB}$ ist ein Doppelpunkt, oder p ist eine Doppellinie. Denn der dem $\mathfrak{Q}$ entsprechende Punkt $\mathfrak{Q}'$ muss wieder in p liegen, und weil nach der Natur der Collineation irgend vier Punkte einer Graden und die vier entsprechenden der entsprechenden Graden gleiche Doppelverhältnisse geben, also

$$(\mathfrak{LMAQ}) = (\mathfrak{LMAQ}')$$

ist, so muss $\mathfrak{Q}$ mit $\mathfrak{Q}'$ identisch, oder $\mathfrak{Q}$ ein Doppelpunkt sein.

Hieraus folgt, dass auch die Punkte $XB' \cdot p \equiv \mathfrak{U}$ und $XP \cdot p \equiv \mathfrak{Y}$ Doppelpunkte sind. Liegen nun die Punkte X, $\mathfrak{U}$, B' der Figur Σ in Einer Graden, so muss dasselbe auch mit den entsprechenden X', $\mathfrak{U}$, B der Figur Σ' der Fall sein und ebenso liegen P, $\mathfrak{Y}$, X' in Einer Graden, weil dasselbe mit P, $\mathfrak{Y}$, X stattfindet. Demnach ist der gesuchte Punkt X' der Durchschnittspunkt von PX mit $B\mathfrak{U}$. Man kann auch X' als den Durchschnittspunkt von $B\mathfrak{U}$ und $B'\mathfrak{U}'$ bezeichnen, wenn $\mathfrak{U}' \equiv BX \cdot p$ ist.

Da von drei Diagonalen eines Vierseits $AB'A'B$ eine jede, wie BB', von den beiden andern AA' und $\mathfrak{LM}$ harmonisch geschnitten wird, so sind $P \equiv BB' \cdot AA'$ und $B \equiv BB' \cdot \mathfrak{LM}$ harmonisch zugeordnet den Punkten B, B' und daher auch $(P\mathfrak{Y}XX') = -1$, weil P, $\mathfrak{B}$, B, B' perspectivisch mit P, $\mathfrak{Y}$, X', X liegen. Mithin theilen der Doppelpunkt P und die Doppellinie p jeden Abschnitt XX' zwischen entsprechenden Punkten harmonisch.

Nimmt man daher X als einen unendlich entfernten Punkt der Ebene an, so liegt der entsprechende J auf der Mitte von $P\mathfrak{Y}$, und alle Punkte J, die den unendlich entfernten der Ebene entsprechen, mag man letztere dem Systeme Σ oder Σ' zugehörig ansehen, liegen auf einer Graden i, welche der Doppellinie p parallel liegt und die Entfernung des Doppelpunktes P von der Doppellinie p halbirt, d. i. auf der Mittellinie.

Aus den harmonischen Verhältnissen $(AA'P\mathfrak{A}) = (BB'P\mathfrak{B}) =$

$(XX'P\mathfrak{P}) = -1$ ergiebt sich weiter das involutorische Verhalten der Punktepaare A und A', B und B', X und X'.

Anmerkung. Denkt man sich in zwei verschiedenen Ebenen ε und ε', deren Durchschnittslinie p sei, in der einen ε ein beliebiges System A, B, C... von Punkten und in der andern ein zu demselben perspectivisches A', B', C'..., wobei der Augen- oder Projectionspunkt P zwischen beiden Ebenen in gleicher Entfernung von jeder derselben liegt; ist dann i die Durchschnittslinie von ε und einer durch P mit ε' parallel gelegten Ebene, i' die Durchschnittslinie von ε' und einer durch P mit ε parallel gelegten Ebene, und lässt man hierauf die eine Ebene um die Durchschnittslinie p sich drehen bis die dem Punkte P zugekehrten Seiten von ε und ε' zusammenfallen, so bilden die nun in Einer Ebene liegenden Punkte A, A', B, B', C, C'... ein involutorisches System, deren Doppelpunkt und Doppelgrade resp. P und p und deren Mittellinie die in Einer vereinigten Graden i und i' sind.

§. 172.

Affinität ebener Systeme. Macht man für die Gleichungen a) des §. 161, welche die collineare Beziehung zweier ebener Figuren feststellen, die besondere Annahme, dass jeder der Coefficienten λ und μ der positiven Einheit gleich ist, so ist das gegenseitige Verhalten beider Figuren dadurch besonders ausgezeichnet, dass der unendlich entfernten Graden der einen Figur wieder eine unendlich entfernte Grade der andern Figur entspricht, und somit Parallelen in der einen wieder Parallelen in der andern entsprechen. Sind nämlich A, B, C drei nicht in einer Graden befindliche Punkte der einen, A', B', C' die entsprechenden der andern Figur, so ist nach obiger Voraussetzung für zwei andere entsprechende Punkte X und X'

$$\frac{\mathfrak{A}C}{\mathfrak{A}B} = \frac{\mathfrak{A}'C'}{\mathfrak{A}'B'}, \quad \frac{\mathfrak{B}C}{\mathfrak{B}A} = \frac{\mathfrak{B}'C'}{\mathfrak{B}'A'}.$$

Rückt dabei die Grade $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ in unendliche Entfernung, so wird

$$\frac{\mathfrak{A}C}{\mathfrak{A}B} = \frac{\mathfrak{B}C}{\mathfrak{B}A} = 1,$$

folglich auch

$$\frac{\mathfrak{A}'C'}{\mathfrak{A}'B'} = \frac{\mathfrak{B}'C'}{\mathfrak{B}'A'} = 1,$$

und es müssen auch $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ zwei unendlich entfernte Punkte und die Grade $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ eine unendlich entfernte sein.

Zwei Systeme oder Figuren, deren unendlich entfernte Graden einander entsprechen, heissen affine Figuren. Die betreffende Verwandtschaft, die Affinität, ist somit eine besondere Art der allgemeineren Collineationsverwandtschaft. Aus der angegebenen besonderen Beziehung affiner Figuren ergeben sich noch nachstehende metrische Relationen.

1) Sind A, B, C, D vier in grader Linie liegende Punkte der einen Figur, A', B', C', D' die entsprechenden der andern affinen Figur, so besteht zwischen denselben nach dem Gesetze der Collineationsverwandtschaft die Gleichheit der Doppelverhältnisse

$$(ABCD) = (A'B'C'D').$$

Ist nun D der unendlich entfernte Punkt der einen Graden, so ist es auch D' in der entsprechenden des affinen Systems und damit vereinfacht sich die Gleichheit der Doppelverhältnisse in die der einfachen Verhältnisse

$$\frac{AC}{CB} = \frac{A'C'}{C'B'},$$

d. h. entsprechende Grade affiner Figuren werden durch entsprechende Punkte ähnlich oder proportional getheilt.

Hieraus folgt, dass die Verwandtschaft der Affinität zwischen Systemen von Punkten, deren jedes in einer Graden enthalten ist, mit der Aehnlichkeit identisch ist, oder affine gradlinige Punktreihen sind ähnlich. Dasselbe folgt auch daraus, dass die unendlich entfernten Punkte beider Graden einander entsprechen. (§. 142.)

2) Sind die Abschnitte AB, CD der einen Figur einander parallel, so sind es auch die entsprechenden $A'B'$, $C'D'$ in der affinen Figur, und ist E der Durchschnittspunkt von AD und BC, so ist der Durchschnittspunkt E' von $A'D'$ und $B'C'$ demselben entsprechend. Nun ist $\frac{AB}{CD} = \frac{AE}{CE}$, ebenso $\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{A'E'}{C'E'}$, folglich, weil A, E, C und A', E', C' in entsprechenden Graden entsprechende Punkte sind, oder $AE : CE = A'E' : C'E'$ ist,

$$AB : CD = A'B' : C'D',$$

d. h. Abschnitte von Parallelen der einen Figur verhalten sich ebenso wie die entsprechenden Abschnitte in der affinen Figur.

Sind also A und C zwei Punkte und a eine Grade der einen, A', B' die entsprechenden Punkte und a' die entsprechende Grade

der affinen Figur, ferner AB, CD zwei von A und C auf a gefällte Senkrechte, $A'B'$, $C'D'$ zwei von A' und B' auf a' gefällte Senkrechte, so sind zunächst AB und CD den Graden $A'B'$ und $C'D'$ entsprechend, weil sie zwei Paare von Parallelen sind, welche durch entsprechende Punkte gehen, und hieraus folgt auch

$$AB : CD = A'B' : C'D';$$

d. h. in affinen Figuren stehen die Entfernungen zweier Punkte (A und C) von einer Graden (a) in der einen Figur in demselben Verhältnisse, wie die Entfernungen der entsprechenden Punkte (A' und C') von der entsprechenden Graden (a') in der andern.

3) Seien A, B, C, D vier Punkte der einen, A', B', C', D' die entsprechenden der andern Figur. Man fälle von C und D auf AB die Perpendikel CC_1, DD_1, ebenso von C' und D' auf $A'B'$ die entprechenden $C'C_1'$, $D'D_1'$, so hat man nach vorigem Satze

$$CC_1 : DD_1 = C'C_1' : D'D_1',$$

mithin

$$CC_1 . AB : DD_1 . AB = C'C_1' . A'B' : D'D_1' . A'B',$$

d. i.

$$\triangle ABC : \triangle ABD = \triangle A'B'C' : \triangle A'B'D',$$

oder die Flächen zweier Dreiecke mit gemeinschaftlicher Seite verhalten sich in der einen Figur ebenso, wie die Flächen der entsprechenden Dreiecke der andern. Aber nicht blos Dreiecke mit gemeinschaftlicher Seite, sondern irgend zwei Dreiecke oder allgemeiner irgend zwei Flächentheile der einen Figur stehen ihrem Flächeninhalte nach in demselben Verhältnisse, wie die entsprechenden Dreiecke oder Flächentheile der andern. Denn ist $ABC = mA'B'C'$, so ist auch $ABD = mA'B'D'$ und, wenn $E, F \ldots E', F' \ldots$ noch andere entsprechende Punkte der beiden Figuren sind, wegen $ABD : BDE = A'B'D' : B'D'E'$, auch $BDE = mB'D'E'$, und wegen $BDE : DEF = B'D'E' : D'E'F'$, auch $ABC : DEF = A'B'C' : D'E'F'$; desgleichen $ABC \pm BCD \pm CDE \pm DEF \pm \ldots = m(ABC \pm BCD \pm CDE \pm DEF \pm \ldots)$ u. s. w., wobei übrigens hinsichtlich der Flächeninhalte entsprechender Dreiecke und Flächentheile in beiden Figuren die Sätze der §§. 22—24 zu berücksichtigen sind.

Vergleicht man diesen Satz mit dem in §. 165 aufgestellten, auf Flächentheile collinearer Figuren bezüglichen Doppelverhältniss, so zeigt sich, dass von den zwei einfachen Verhältnissen, aus

17*

denen das Doppelverhältniss zusammengesetzt ist, bei affinen Figuren schon jedes für sich allein von einer Figur zur andern constant ist. Auch hierin also lässt sich die Affinität als specieller Fall der Collineation erkennen.

Jede der unter 1, 2, 3 bemerkten Eigenschaften affiner Figuren kann als Definition für diese Art von Verwandtschaft dienen, aus welcher sich die jedesmal übrigen ableiten lassen. Erklärt man z. B. die Affinität durch die Unveränderlichkeit des Verhältnisses je zweier Dreiecke von der einen Figur zur andern, oder setzt man

$$ABC = m\,A'B'C'$$

voraus, wie auch die drei Punkte A, B, C der einen gewählt werden mögen, so ergiebt sich folgendes. Liegen A, B, C in Einer Graden, so ist das Dreieck $ABC = 0$, folglich auch $A'B'C' = 0$, also A', B', C' in Einer Graden. — Sind D und D' zwei sich entsprechende, ausserhalb dieser Graden liegende Punkte, so ist $ABD : BCD = AB : BC$ und $A'B'D' : B'C'D' = A'B' : B'C'$, mithin $AB : BC = A'B' : B'C'$. — Haben die Punkte A, B, C, D eine solche Lage, dass die Graden AB, CD parallel sind, so ist $ABC = ABD$, mithin auch $A'B'C' = A'B'D'$ und daher $A'B'$ parallel $C'D'$. — Unter derselben Voraussetzung, dass AB und CD parallel sind, hat man auch $ABD : CBD = AB : CD$ und $A'B'D' : C'B'D' = A'B' : C'D'$, mithin $AB : CD = A'B' : C'D'$, oder entsprechende Abschnitte von Parallelen stehen von einer Figur zur andern in gleichem Verhältniss.

Ebenso lassen sich die Haupteigenschaften affiner Figuren aus dem Satze ableiten, dass der Abstand irgend zweier Punkte der einen Figur von allen übrigen Graden in denselben Verhältnissen geschnitten wird, wie der Abstand der entsprechenden Punkte von allen übrigen entsprechenden Graden in der andern Figur.

5) Auf letztgenannte Eigenschaft lässt sich eine einfache Construction affiner Figuren gründen, welche der oben §. 166 gegebenen Construction collinearer Figuren entsprechend ist. Seien A, B, C und A', B', C' drei Punkte der einen und die beliebigen drei entsprechenden der andern Figur, X ein Punkt der ersten, zu welchem der entsprechende X' in der zweiten gefunden werden soll. Man nehme AB, AC als Axen in der einen, ebenso $A'B'$, $A'C'$ in der andern Figur, verbinde X mit B und C, welche Graden XB und XC die AC und AB resp. in $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{X}$ treffen, theile dann $A'B'$ und $A'C'$ in zwei Punkten $\mathfrak{X}'$ und $\mathfrak{Y}'$ so, dass $A'\mathfrak{X}' : \mathfrak{X}'B' = A\mathfrak{X} : \mathfrak{X}B$ und

$A'\mathfrak{Y}':\mathfrak{Y}'C' = A\mathfrak{Y}:\mathfrak{Y}C$ ist und verbinde $\mathfrak{X}'$ mit C', $\mathfrak{Y}'$ mit B', so schneiden sich die Graden $\mathfrak{X}'C'$ und $\mathfrak{Y}'B'$ in dem gesuchten Punkte X'.

6) Setzt man für die zu collinear liegenden Figuren gehörige Relation (§. 168, 4)

$$\frac{PX}{PX'} = \lambda \cdot \frac{\mathfrak{P}X}{\mathfrak{P}X'}$$

voraus, dass das Collineationscentrum unendlich entfernt liegt, so wird $PX:PX' = 1$ und man hat

$$\mathfrak{P}X' = \lambda\, \mathfrak{P}X,$$

d. i., weil $\mathfrak{P}$ ein selbstentsprechender Punkt ist, die für die Affinität charakteristische, unter 1 bemerkte Relation. Die Collineation geht also in Affinität über, wenn das Collineationscentrum unendlich entfernt ist. Bei dieser Lage sind die Verbindungsgraden XX' entsprechender Punkte zu einander parallel. Daher finden die unter 3) bemerkten Flächenrelationen bekanntlich auch statt zwischen ebenen Figuren, wovon die eine die (Parallel-) Projection der andern ist.

§. 173.

Gleichheit ebener Figuren. Die *Affinität*, welche auf Gleichheit der Verhältnisse entsprechender Flächentheile in den betreffenden Figuren sich basiren lässt, (s. 3) des vorhergehenden §.) *geht in eine noch speciellere Verwandtschaft über, wenn der Exponent m des constanten Verhältnisses der Einheit gleich gesetzt wird.*

Diese Verwandtschaft, welche hiernach in der Gleichheit entsprechender Flächentheile besteht, ist von Herrn *Moebius* (Baryc. Calc. §. 161) *Gleichheit* der Figuren genannt worden und unterscheidet sich, wie bereits oben §. 133, 3 vorläufig bemerkt worden ist, von der in der gewöhnlichen Elementargeometrie behandelten Gleichheit dadurch, dass nach derselben nicht blos die Figuren bezüglich ihres Gesammtflächeninhalts, sondern auch des Inhalts ihrer entsprechenden Flächentheile mit einander übereinstimmen. Hiernach können z. B. nur Polygone von gleichviel Ecken in dieser engeren Beziehung zu einander stehen.

Selbstverständlich behalten alle über affine Figuren gemachten Bemerkungen ihre Geltung für *gleiche* Figuren; so werden z. B. alle entsprechenden Abschnitte durch entsprechende Punkte in gleichem Verhältnisse getheilt u. s. w. Desgleichen ist auch

die allgemeine Construction gleicher Figuren in der Hauptsache dieselbe wie die affiner Figuren (s. vor. §.), nur dass hinsichtlich der Annahme der Punkte A', B', C', welche den Punkten A, B, C entsprechen sollen, die specielle Bestimmung hinzutritt, dass nach beliebiger Wahl der Punkte A' und B' dem Punkte C' eine solche Lage gegeben werden muss, für welche das Dreieck $A'B'C'$ dem Dreieck ABC flächengleich wird. Der Ort von C' ist demnach eine Parallele von $A'B'$ in einem solchen Abstande h von derselben, dass $\frac{1}{2}h.A'B' = ABC$ ist.

Für gradlinige Systeme von Punkten geht die Gleichheit in Aehnlichgleichheit über, sowie die Affinität in die Aehnlichkeit.

§. 174.

Aehnlichkeit gradliniger und ebener Systeme.

1) Die Bedingungen, unter welchen collineare gradlinige Punktreihen in ähnliche übergehen, sind bereits oben §. 142 u. 145, 2 erwähnt worden. Es ist ferner leicht einzusehen, dass bei collinearer oder perspectivischer Lage der betreffenden Punktreihen diese Bedingungen der Aehnlichkeit gleichfalls bestehen können. Man nennt dann die Punktreihen ähnlich liegend, den Projectionspunkt, in welchem die Verbindungsgraden entsprechender Punkte sich schneiden, den Aehnlichkeitspunkt. Der Aehnlichkeitspunkt liegt unendlich entfernt, wenn der Durchschnittspunkt der ähnlich getheilten Graden ein selbstentsprechender in endlicher Ferne ist. Ist der Durchschnittspunkt der ähnlich getheilten Graden unendlich entfernt, also auch selbstentsprechend (§. 142), so liegt der Projectionspunkt in endlicher Ferne und zwar ausserhalb oder innerhalb des zwischen beiden Parallelen liegenden Streifens (äusserer oder innerer Projectionspunkt), je nachdem die entsprechenden Abschnitte auf beiden Parallelen gleiche oder entgegengesetzte Richtung haben (einstimmig oder entgegengesetzt sind).

Der Fall, dass beide ähnliche Punktreihen in Einer Graden enthalten sind, ist bereits unter §. 151, 1 und 2 berücksichtigt worden.

2) Liegen die in den Punkten $A, B, C \ldots A', B', C' \ldots$ ähnlich getheilten Graden s und s' nicht collinear, sondern schief, oder ist ihr Durchschnittspunkt $s \cdot s' \equiv R$ kein selbstentsprechender, so lassen sich in der Ebene beider Graden zwei endlich gelegene Punkte S und S_1 bestimmen, von welchen aus je zwei entsprechende Abschnitte AB und $A'B'$, BC und $B'C' \ldots$ unter gleichen Winkeln $ASB = A'SB'$,

$BSC = B'SC' \ldots$ und $AS_1B = B'S_1A'$, $AS_1C = C'S_1A_1 \ldots$ erscheinen die für den einen Punkt S einstimmig, für den andern Punkt S_1 entgegengesetzt sind, so dass auch die Dreiecke mit der gemeinschaftlichen Spitze S SAB, $SBC \ldots$ und $SA'B'$, $SB'C' \ldots$ einstimmig ähnlich, sowie die Dreiecke mit der gemeinschaftlichen Spitze S_1 S_1AB, $S_1BC \ldots$ und $S_1A'B'$, $S_1B'C' \ldots$ entgegengesetzt ähnlich sind (s. §. 22). Von diesen Punkten, welche nach Magnus Situationspunkte heissen mögen, kann der eine auf gleiche Weise wie der Punkt O (Fig. 52, S. 187) gefunden werden. Schneiden sich die Graden AA', BB' in dem Punkte $\mathfrak{S}$ und beschreibt man um $\mathfrak{S}AB$ und um $\mathfrak{S}A'B'$ zwei Kreise, so ist deren zweiter Durchschnittspunkt S der eine Situationspunkt, von welchem aus je zwei entsprechende Abschnitte unter einstimmig gleichen Winkeln erscheinen. Zur Bestimmung des Punktes S_1, von welchem aus die Dreiecke AS_1B, $BS_1C \ldots$ und $A'S_1B'$, $B'S_1C' \ldots$ entgegengesetzt ähnlich sind, bemerke man, dass für diese Forderung die Winkel BS_1A und $A'S_1B'$ einstimmig gleich, also auch die Winkel $BS_1A + AS_1A'$ und $AS_1A' + A'S_1B'$ oder BS_1A' und AS_1B' einstimmig gleich sind. Folglich haben die Winkel AS_1A', BS_1B' eine und dieselbe Halbirungslinie, welche die AA' in $\mathfrak{A}$, die BB' in $\mathfrak{B}$ treffe. Man hat dann weiter $A\mathfrak{A} : \mathfrak{A}A' = S_1A : S_1A' = AB : A'B'$ und ebenso $B\mathfrak{B} : \mathfrak{B}B' = AB : A'B'$, weil $AS_1 : S_1B : BA = A'S_1 : S_1B' : B'A'$ sein soll. Da ausserdem $AB : A'B' = AS : A'S$, so ist auch $A\mathfrak{A} : \mathfrak{A}A' = B\mathfrak{B} : \mathfrak{B}B' = SA : SA'$, folglich $S\mathfrak{A}$ die Halbirungslinie vom Winkel ASA' und $S\mathfrak{B}$ von BSB'. Durch die Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ist also die Grade $S_1\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ bestimmt. Zieht man zu derselben durch S_1 eine Senkrechte, so schneidet diese die AA' und BB' resp. in $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$, so dass $(AA'\mathfrak{A}\mathfrak{A}') = (BB'\mathfrak{B}\mathfrak{B}') = -1$ ist. Somit ist die $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$, also auch S_1 bestimmt.

Zur Bestimmung von S hätten auch zwei Kreise durch R, A, A' und R, B, B' gelegt werden können, deren zweiter Durchschnitt ebenfalls S ist.*)

3) Kommt zu den in §. 172 aufgestellten Bedingungen, unter welchen die Collineation in Affinität übergeht, die specielle Bestimmung, dass die drei Punkte A', B', C' eine solche gegenseitige

---

*) Weitere Sätze bezüglich der schiefen Lage ähnlicher Linearfiguren enthält die bereits oben S. 200 erwähnte Gelegenheitsschrift des Herrn Dr. Baltzer.

Lage haben sollen, dass $A'B' = mAB$, $B'C' = mBC$, $C'A' = mCA$ oder $A'B' : B'C' : C'A' = AB : BC : CA$ ist, so wird das zweite von den Punkten A', B', C', X' gebildete System dem ersteren A, B, C, X ähnlich sein. Sowie die Gleichheit, kann also auch die Aehnlichkeit durch Specialisirung der affinen Beziehung, nur nach anderer Richtung hin, hervorgegangenen gedacht werden. Wie sich leicht erweisen lässt, findet bei ähnlichen Figuren nicht blos Proportionalität statt zwischen Abschnitten einer und derselben Graden in der einen Figur und den entsprechenden auch in Einer Graden liegenden Abschnitten in der andern Figur, sondern überhaupt zwischen irgend zwei auch nicht in Einer Graden enthaltenen Abschnitten der einen und andern Figur. Ebenso ergiebt sich das Verhältniss je zweier entsprechender Abschnitte in beiden Figuren gleich dem der entsprechenden Seiten der Dreiecke ABC und $A'B'C'$.

Aus diesen Elementarsätzen für ähnliche ebene Figuren, in deren Erörterung hier nicht weiter eingegangen werden soll, folgt noch für die Construction eines ebenen Systemes, welches dem gegebenen A, B, C, X ähnlich sein soll, dass man die zwei ersten Punkte A', B', die A und B entsprechen, beliebig legen kann. Der Ort von C' ist alsdann einer der Durchschnitte C', C'' zweier von A' und B' aus mit den Halbmessern resp. mAC und mBC beschriebenen Kreise, wobei $m = A'B' : AB$ gesetzt ist. Jedes der somit bestimmten Dreiecke $A'B'C'$, $A'B'C''$ ist dem Dreiecke ABC ähnlich, doch mit dem Unterschiede, dass das eine z. B. $A'B'C'$ nach den in §. 22 aufgestellten Principien mit dem gegebenen ABC einstimmig, das andere $A'B'C''$ demselben entgegengesetzt ist. Verfährt man in Betreff der übrigen Punkte X' ganz so, wie es §. 172, 5 für affine Figuren angegeben worden ist, so erhält man mit Zugrundelegung des Dreiecks $A'B'C'$ eine der gegebenen einstimmig ähnliche Figur A', B', C', X', dagegen auf Grundlage des Dreiecks $A'B'C''$ eine entgegengesetzt ähnliche Figur $A'B'C''X''$. Die Punkte X' lassen sich auch wie C' bestimmen, wenn man über $A'B'$ mit $AX = mAX$ und $B'X' = mBX$ Dreiecke $A'B'X'$ construirt, die mit $A'B'C'$ einstimmig oder entgegengesetzt sind, je nachdem dasselbe mit ABX und ABC der Fall ist. Desgleichen ergeben sich die Punkte X'' durch Construction von Dreiecken $A'B'X''$ die unter derselben Bedingung mit $A'B'C''$ einstimmig oder entgegengesetzt sind.

4) Wird in der Gleichung für die collineare Lage zweier ebener Figuren §. 168, 4

$$\frac{PX}{PX'} : \frac{\mathfrak{p}X}{\mathfrak{p}X'} = \lambda$$

die Collineationsaxe p unendlich entfernt genommen, so wird das Verhältniss $\mathfrak{p}X : \mathfrak{p}X' = 1$ und man hat

$$PX : PX' = \lambda,$$

d. h. die beiden Figuren sind ähnlich.

Den Collineationsmittelpunkt P nennt man in diesem Falle den Aehnlichkeitspunkt, die Figuren selbst ähnlich liegend, und λ den Coefficient der Aehnlichkeit. Je nachdem λ positiv oder negativ ist, wird P äusserer oder innerer Aehnlichkeitsmittelpunkt, d. h. P liegt auf derselben Seite zu beiden Figuren, oder zwischen denselben. Da die Collineationsaxe unendlich entfernt ist, so liegen die Verbindungsgraden X_1X_2 je zweier Punkte der einen Figur mit den Verbindungsgraden $X_1'X_2'$ entsprechender Punkte der andern Figur parallel.

5) Haben die ähnlichen Figuren eine beliebige Lage, so sind die Figuren entweder einstimmig oder entgegengesetzt, je nachdem dasselbe der Fall ist mit zwei entsprechenden Dreiecken (vergl. 3). Sind die Figuren einstimmig ähnlich, so giebt es in ihrer Ebene einen selbstentsprechenden Punkt S, den Situationspunkt, welcher auf dieselbe Weise wie bei ähnlichen gradlinigen Systemen gefunden wird (s. o. 2). Denn ist S so bestimmt, dass die Dreiecke SAB und $SA'B'$ einstimmig ähnlich sind, so sind auch die Winkel SAB und $S'A'B'$ einstimmig gleich und weil auch die Dreiecke BAX und $B'A'X'$ einstimmig ähnlich sind, so hat man die einstimmig gleichen Winkel BAX und $B'A'X'$, mithin sind auch die Winkel $SAB + BAX$ oder SAX und $SA'B' + B'A'X'$ oder $SA'X'$ einstimmig ähnlich.

Für irgend zwei entsprechende Abschnitte als Grundlinien bildet also der Situationspunkt die gemeinschaftliche Spitze zweier einstimmig ähnlicher Dreiecke.

Dreht man die eine Figur in ihrer Ebene um den Situationspunkt, so dass die entsprechenden Graden SA und SA' in Eine Grade fallen, und dabei entweder einstimmige oder entgegengesetzte Richtung haben, so fallen auch jede zwei von S aus nach entsprechenden Punkten gehende Strahlen SX und SX' auf einander und liegen einstimmig oder entgegengesetzt, je nachdem dasselbe mit SA und SA' der Fall ist. Die Figuren sind dann ähnlich liegend

und S ist bei einstimmiger Richtung von SX und SX' äusserer, bei entgegengesetzter Richtung derselben Graden innerer Aehnlichkeitspunkt.

6) Sind die Figuren $ABCX$, $A'B'C'X'$ entgegengesetzt ähnlich, so giebt es in ihrer Ebene einen selbstentsprechenden Punkt S_1 und zwei in demselben rechtwinklig sich schneidende selbstentsprechende Grade, von denen die eine s, zwei einstimmig ähnliche Punktreihen, die andere s_1, zwei entgegengesetzt ähnliche Punktreihen enthält.

Wird nämlich der Punkt S_1 wie oben (s. 2) so bestimmt, dass S_1AB und $S_1A'B'$ entgegengesetzt ähnliche Dreiecke sind, so lässt sich wie vorhin darthun, dass es auch die Dreiecke S_1AX und $S_1A'X'$ sind. Ferner ergiebt sich leicht, dass die Halbirungslinie der Winkel AS_1A', $BS_1B' \ldots XS_1X'$ ein und dieselbe Grade s ist und sich selbst entspricht. Hieraus folgt, dass, wenn die eine Figur um die s als Axe herumgedreht wird, bis die Ebene beider Figuren wieder mit einander zusammenfallen, dann die von S_1 ausgehenden entsprechenden Graden S_1X und S_1X' auf einander liegen und alle übrigen entsprechenden Graden X_1X_2 und $X_1'X_2'$ einstimmig parallel sind, oder kurz, dass die beiden Figuren ähnlich liegen und S_1 ihr äusserer Aehnlichkeitspunkt ist. Je zwei entsprechende parallele Grade schneiden mithin die s in Punkten, deren Entfernungen von S_1 einstimmig sind und in constantem Verhältnisse (gleich dem Aehnlichkeitscoefficienten λ) stehen.

Eine durch S_1 gelegte, zu s senkrechte Grade s_1 wird mit ihren beiden von S_1 genommenen entgegengesetzten Richtungen nach dieser Umdrehung um s ebenfalls auf einander fallen, also auch eine selbstentsprechende Grade sein. Dieselbe halbirt demnach (bei unveränderter Lage der Figuren) die Nebenwinkel von XS_1X' und wird von entsprechenden Graden X_1X_2, $X_1'X_2'$ in Punkten geschnitten, deren Entfernungen von S_1 gleichfalls in constantem Verhältnisse ($=\lambda$) stehen, aber entgegengesetzte Richtung haben. — Dreht man die eine Figur um s_1 als Axe bis die Ebenen beider wieder zusammenfallen, so bilden die Graden S_1X und S_1X' mit den beiden Hälften von s sowohl als auch von s_1 einstimmige Scheitelwinkel, oder es liegen S_1X und S_1X' entgegengesetzt gerichtet in derselben Graden; mithin sind wegen Aehnlichkeit von $S_1X_1X_2$ und $S_1X_1'X_2'$ auch X_1X_2 und $X_1'X_2'$ Parallelen von entgegengesetzter Richtung und die Fi-

guren in dieser Lage ähnlich liegend mit S_1 als innerem Aehnlichkeitspunkt.

Für die ursprüngliche Lage beider Figuren schneiden übrigens s und s_1 jede Verbindungsgrade XX' entprechender Punkte harmonisch nach dem Aehnlichkeitscoefficienten λ, oder dem Verhältniss $AB : A'B' = S_1A : S_1A'$ zweier entsprechender Strecken (§. 46, 3).

§. 175.

Aehnlichgleichheit gradliniger und ebener Systeme. Dass die Gleichheit der Figuren bei gradlinigen Systemen in die vollständige Ueberstimmung oder Aehnlichgleichheit übergeht, ist bereits oben a. b. O. bemerkt worden. Bei gleichen Linearfiguren auf Parallelen oder in einer und derselben Graden hat man nur noch zu unterscheiden, ob die Figuren oder die Aufeinanderfolge entsprechender Punkte einstimmig oder entgegengesetzt ist. Die metrischen Verhältnisse dafür sind bereits §. 151, 3 und 4 angedeutet worden.

Haben die gleichen Figuren $A, B, C \ldots A', B', C' \ldots$ auf zwei Graden einen selbstentsprechenden Punkt mit einander gemein, (der auch der unendlich ferne beider Graden sein kann) so sind die Figuren ähnlich oder gleichliegend (perspectivisch). Die Verbindungsgraden AA', BB', $CC' \ldots$ entsprechender Punkte gehen durch einen und denselben Punkt P der Ebene, der unendlich entfernt ist, wenn die Graden $ABC \ldots$, $A'B'C' \ldots$ sich in einem endlichen selbstentsprechenden Punkte schneiden, oder wenn sie einstimmig parallel sind. Sind die Graden entgegengesetzt parallel, so schneiden sich AA', BB', $CC' \ldots$ in einem endlich zwischen $ABC \ldots A\ B'C' \ldots$ gelegenen Punkte P (innerer Projectionspunkt, Mittelpunkt).

Treffen sich die gleich getheilten Graden in einem (endlich gelegenen) Punkte R, welcher kein selbstentsprechender ist, oder haben, wie man auch hier sagt, die Graden schiefe Lage, so giebt es wie bei ähnlichen Linearfiguren in ihrer Ebene einen in gleicher Weise bestimmbaren Punkt S, den Situationspunkt, von welchem aus entsprechende Abschnitte unter gleichem Winkel erscheinen und entsprechende Punkte gleichen Abstand haben. Wird die eine Grade um diesen Punkt herumgedreht bis zwei von demselben nach entsprechenden Punkten gezogene Strahlen in eine Grade

fallen, so kommen beide getheilte Grade entweder auf einander in einstimmiger Lage zu liegen (congruiren), oder sind einander parallel und entgegengesetzt gerichtet, je nachdem jene zwei zusammenfallende Strahlen gleiche oder entgegengesetzte Richtung haben. Im letztern Falle halbirt der Punkt S den Abstand der beiden Parallelen sowie jede Verbindungsgrade entsprechender Punkte, ist also Mittelpunkt beider Systeme. Ein Punkt S_1, von dem aus entsprechende Abschnitte unter entgegengesetzt gleichen Winkeln erscheinen, existirt als ein endlicher Punkt der Ebene nicht.

Bezüglich ähnlichgleicher Figuren in einer Ebene ergeben sich nach §. 173, 3, 4, 5 entsprechende Sätze, wenn man den Aehnlichkeitscoefficienten der Einheit gleich setzt. Vereinigt dabei eine selbstentsprechende Grade gleiche Punktreihen, so ist §. 151, 3, 4 oder 156, 3 zu berücksichtigen.

Sind die ähnlichgleichen Figuren $ABCD\ldots$, $A'B'C'D'\ldots$ einstimmig, was jedesmal der Fall ist, wenn irgend zwei entsprechende Dreiecke ABC, $A'B'C'$ es sind, so haben sie einen selbstentsprechenden Punkt S, der von entsprechenden Punkten und von entsprechenden Graden gleichen Abstand hat. Haben dabei entsprechende Grade AB, $A'B'$ beider Figuren verschiedene Richtung, so ist S jedesmal ein endlicher Punkt der Ebene, dessen Bestimmung der in §. 174, 2, 5 bemerkten analog ist. S wird für die Verbindungsgraden AA', $BB'\ldots$ entsprechender Punkte zugleich der gemeinschaftliche Mittelpunkt, wenn zwei entsprechende Strecken AB, $A'B'$ entgegengesetzt parallel sind. In letzterem Falle bilden beide Figuren als eine einzige aufgefasst ein involutorisches System.

Ist eine Grade ihrer entsprechenden einstimmig parallel, so ist der Punkt S als der Durchschnittspunkt der einstimmigen Parallelen AA', $BB'\ldots$, ein unendlich entfernter.

Sind die ähnlichgleichen Figuren $ABCD$ und $A'B'C'D'$ einander entgegengesetzt, was jedesmal der Fall ist, wenn es zwei entsprechende Dreiecke ABC und $A'B'C'$ sind, so giebt es in ihrer Ebene, eine selbstentsprechende Grade, welche durch die Mitten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}\ldots$ der Verbindungsgraden AA', $BB'\ldots$ geht und gleichen Abstand von den entsprechenden Punkten hat. Die Durchschnittspunkte entsprechender Graden mit derselben bilden zwei einstimmig gleiche Punktreihen, deren Doppelpunkte also in dem unendlich fernen der Graden zusammenfallen. Die Figuren haben somit keinen end-

lichen selbstentsprechenden Punkt. Verschiebt man die Figuren, so dass die selbstentsprechende Grade ihre Lage nicht verändert und zwei entsprechende Punkte der genannten Punktreihen auf derselben zusammenfallen, so decken sich alle entsprechenden Punkte derselben und die Figuren haben symetrische Lage um diese selbstentsprechende Grade oder Axe. Dasselbe ist der Fall, wenn zwei entsprechende Grade AB, $A'B'$ mit einer Verbindungsgraden AA', entsprechender Punkte entgegengesetzt gleiche Winkel bilden.

§. 176.

Stellung beliebiger collinearer Figuren einer Ebene in collineare Lage zu einander. Zwei collineare Punktreihen konnten auf sehr einfache Weise in collineare Lage gebracht werden, in welcher dann durch bloses Ziehen grader Linien zu jedem Punkte der einen Reihe der entsprechende der anderen sich bestimmen liess. Es fragt sich nun, ob es nicht auch für ebene Figuren ein ähnlich einfaches Verfahren giebt, zu jedem Punkte der einen Figur den entsprechenden in der collinearen zu finden. Nach der Bedeutung des Collineationspunktes und der Collineationsaxe als Doppelelemente collinear liegender Figuren ergiebt sich sofort, dass, wenn die vier Punkte A, B, C, D der einen und $A'B'C'D'$ der andern Figur collinear liegen zu jedem fünften Punkte X der entsprechende X' dadurch bestimmt ist, dass X und X' mit dem Collineationscentrum P in Einer Graden liegen, und eine durch X und X' gelegte entsprechende Grade z. B. AX und $A'X'$ in Einem Punkte $\mathfrak{X}$ der Collineationsaxe p sich treffen müssen. Somit ist $\mathfrak{X} \equiv p \cdot AX$ und $X' \equiv PX \cdot A'\mathfrak{X}$. Die gestellte Aufgabe ist somit an die Bedingung geknüpft, dass $ABCD$ und $A'B'C'D'$ sich in collinearer Lage befinden und es handelt bei zwei beliebig gelegenen collinearen Figuren, als welche jede zwei Vierecke angesehen werden können (§. 163), darum, dieselben in collineare Lage zu bringen — die Möglichkeit davon vorausgesetzt, welche streng genommen zuerst festzustellen wäre.

Seien $ABCD$, $A'B'C'D'$ zwei beliebig gelegene Vierecke in einer Ebene, AB und CD, BC und DA, CA und BD schneiden sich resp. in E, F, G und in gleicher Weise seien E', F', G' die entsprechenden Durchschnittspunkte in der andern Figur. Man bestimme zuerst für beide Figuren die Gegenaxen i und i', indem man in jeder derselben zwei Paare von Parallelen zieht, zu denen die entsprechen-

den Graden der andern Figur sich in zwei Punkten schneiden, durch welche die Gegenaxe der letztern gehen muss (§. 162). Zu dem Zwecke ziehe man mit Benutzung schon vorhandener Graden durch D die $D\mathfrak{B}$ und $D\mathfrak{C}$ parallel resp. zu AB und AC, welche die AC und AB resp. in $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ treffen. Man bestimme dann in der andern Figur die Punkte $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{C}'$ so, dass $(ACG\mathfrak{B}) = (A'C'G'\mathfrak{B}')$ und $(ABE\mathfrak{C}) = (A'B'E'\mathfrak{C}')$ ist (§. 140), und ziehe die Grade $D'\mathfrak{B}'$, welche die $A'B'$ in J' trifft, ebenso die $D'\mathfrak{C}'$, welche die $A'C'$ in K' schneidet. Die durch J', K' gelegte Grade i' ist dann die Gegenaxe der zweiten Figur. Desgleichen ziehe man durch D' zwei Parallelen $D'\mathfrak{E}'$ und $D'\mathfrak{F}'$ zu resp. $A'B'$ und $A'C'$, welche die $A'C'$ und $A'B'$ resp. in $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{F}'$ schneiden, bestimme in der ersten Figur zwei Punkte $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ so, dass $(A'C'G'\mathfrak{E}') = (ACG\mathfrak{E})$ und $(A'B'E\mathfrak{F}') = (ABE\mathfrak{F})$ ist und ziehe die Graden $D\mathfrak{E}$ und $D\mathfrak{F}$, welche resp. AB und AC in J und K treffen. Die Grade $JK \equiv i$ ist dann die Gegenaxe der ersten Figur. Durch zwei entsprechende Punkte D und D' ziehe man hierauf zwei Parallelen l und l' zu den Gegenaxen i und i', so werden diese einander entsprechen und von entsprechenden Graden proportional getheilt werden (§. 162). Bezeichnet man also die Durchschnittspunkte von l und AB, BC, CA resp. mit γ, α, β, ebenso von l' und $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ mit γ', α', β', so hat man $D\alpha : D\beta : D\gamma = D'\alpha' : D'\beta' : D'\gamma'$. Zu den ähnlich getheilten Graden l und l' bestimme man nun den Situationspunkt P, für den die Dreiecke $PD\alpha$, $PD\beta$... und $PD'\alpha'$, $PD'\beta'$... einstimmig ähnlich sind, so ist derselbe auch das Collineationscentrum für beide Figuren. Dreht man die eine Figur um denselben soweit, bis entsprechende Grade PD und PD', $P\alpha$ und $P\alpha'$... in Eine zu liegen kommen, so sind dann die Graden l und l', folglich auch die Gegenaxen i und i' einander parallel. Die Figuren liegen also collinear, da auch die Verbindungsgraden DD', $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ entsprechender Punkte durch Einen Punkt P gehen.

Seien bei der collinearen Lage der Figuren $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}'$ die Durchschnittspunkte des Strahles PDD' mit den Gegenaxen i und i', ferner $\mathfrak{P}$ ein Punkt auf PD dergestalt bestimmt, dass $\mathfrak{D}'\mathfrak{P} = P\mathfrak{D}$ ist, so muss eine durch P mit den Gegenaxen parallel gezogene Grade p die Collineationsaxe sein (§. 170). Bestimmt man somit in der ursprünglichen Lage der Figuren auf PD und PD' die Punkte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$, so dass $P\mathfrak{P}_1 = P\mathfrak{P}_2 = P\mathfrak{P}$ ist, und zieht durch $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ mit resp. i und i' zwei Parallelen p_1 und p_2, so sind diese zwei

entsprechende Grade, welche von den übrigen entsprechenden Graden so getheilt werden, dass ihre entsprechenden Abschnitte gleich sind.

Da die beiden ähnlich getheilten Graden l und l' auf zweierlei Weise perspectivisch gelegt werden können, je nachdem P zum äussern oder innern Aehnlichkeitspunkt derselben gemacht wird oder je nachdem die Graden l und l' rücksichtlich der Aufeinanderfolge ihrer entsprechenden Abschnitte einstimmig oder entgegengesetzt parallel werden; so können auch für ein und dasselbe Collineationscentrum P die Figuren auf zweierlei Art in collineare Lage gebracht werden. Für jede dieser Lagen ist die Collineationsaxe eine andere.

Weil endlich auch die Graden l und l' noch einen zweiten Situationspunkt P_1 haben, von dem aus die Dreiecke $P_1 D\alpha$, $P_1 D'\alpha'$ entgegengesetzt ähnlich sind, so wird man auch noch die Figuren in collineare Lage bringen können, wenn man die eine Figur um eine der von P_1 ausgehenden Graden als um eine Axe eine (halbe) Umdrehung machen lässt, bis ihre Ebene wieder mit der der andern Figur zusammenfällt und hierauf in derselben Ebene sie um den Punkt herum verschiebt, bis zwei entsprechende Strahlen $P_1 D$ und $P_1 D'$ in gleiche oder entgegengesetze Richtung zu liegen kommen. In beiden Fällen sind für das Collineationscentrum P_1 die Figuren collinear liegend doch wieder mit verschiedenen Collineationsaxen.

Ausser der Collineationsverwandtschaft wäre zunächst die Verwandtschaft der Reciprocität zu behandeln, nach welcher einem Punkte und einer Graden der einen Figur resp. eine Grade und ein Punkt der andern Figur entspricht; oder wie man auch bestimmter sagen kann, derzufolge jedes Doppelverhältniss zwischen vier Punkten einer Graden in der einen Figur dem Doppelverhältniss zwischen vier durch einen Punkt gehenden Graden in der andern Figur gleich ist. Insofern diese Verwandtschaft mit der Theorie der Polaren bezüglich eines Kreises oder eines Kegelschnitts überhaupt in zweckmässige Verbindung gebracht werden kann, ist davon, sowie von der dualen Beziehung der Figuren im Allgemeinen, hier noch Umgang genommen worden. Hierzu kommt, dass diese Verwandtschaft als die einfachste Beziehung zwischen ungleichar-

tigen Elementen der Figuren gewissermaassen den Uebergang zu höhern Verwandtschaften bildet, nach welchen z. B. einer Graden der einen Figur eine gewisse Curve der andern, einem Punkte der einen eine grade oder krumme Linie der andern u. s. w. entsprechend gesetzt wird. Die der Collineation zunächst stehende Verwandtschaft in dieser Beziehung ist die Kreisverwandtschaft, deren Theorie von Herrn Möbius *) ausgebildet worden ist, wenn auch Herr Magnus mehrere Andeutungen bezüglich einer solchen und noch allgemeineren Verwandtschaft früher gegeben hat. **)

Mehrere der aus der Kreisverwandtschaft hervorgehenden Sätze sind bereits im 5. Capitel §. 111 u. d. folg. nach einer früher von Herrn Möbius gegebenen Darstellung entwickelt worden und es stehen demgemäss zwei Figuren $ABCDE\ldots$ $A'B'C'D'E'\ldots$ in der genannten Verwandtschaft, wenn die complexen Doppelverhältnisse $[ABCD]$, $[ABCE]\ldots$ der einen Figur, den entsprechenden complexen Doppelverhältnissen $[A'B'C'D']$, $[A'B'C'E']\ldots$ der andern gleich sind. Die Auflösung der complexen Doppelverhältnisse ergiebt weiter, dass in kreisverwandten Systemen die §. 115 bezeichneten einander entsprechenden Quaternionen, d. h. absolute Doppelverhältnisse und Doppelwinkel einander gleich sind.

Die Kreisverwandtschaft kann man somit als eine Verallgemeinerung der Collineationsverwandtschaft insofern ansehen, als die Beschränkung aufgehoben wird, dass die von einer Figur zur andern gleichen Doppelverhältnisse nur zwischen Abschnitten, die auf je Einer Graden liegen, bestehen sollen. Sowie ferner die Aehnlichkeit gradliniger Systeme in die Aehnlichkeit ebener Figuren übergeht, wenn die gradlinigen Abschnitte complex genommen werden, so geht die Collineation gradliniger Systeme in die Kreisverwandtschaft über, wenn hierbei die Abschnitte complex gesetzt werden. Die Kreisverwandtschaft stellt in dieser Hinsicht gewissermaassen eine potenzirte Aehnlichkeit vor. Der Gleichheit der Winkel bei ähnlichen Figuren entspricht die Gleichheit der Doppelwinkel bei kreisverwandten, der Gleichheit der Seitenver-

---

*) Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung (aus den Abhandlungen der math. phys. Classe d. K. S. Gesellsch. d. Wissensch, 1855).

**) *Nouvelle méthode pour decouvrir des théorèmes de géométrie.* Crelle Journal. 8. Bd. u. Sammlung von Aufgaben u. Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie. S. 229 u. 288.

hältnisse die Gleichheit der absoluten Doppelverhältnisse zwischen entsprechenden Graden.

Kreisverwandtschaft ist diese Beziehung von Herrn Möbius genannt worden, weil sich nachweisen lässt (s. §. 118), dass, wenn bei solchen Figuren vier Punkte der einen in einem Kreise liegen, die vier entsprechenden Punkte der andern auch in einer Kreisperipherie enthalten sind.

Zusatz zu §. 166.

Mit Berücksichtigung der in §. 32 und 38 aufgestellten Lehrsätze ergiebt sich aus der angegebenen Construction einer collinearen Figur auch sehr leicht die Richtigkeit folgenden Lehrsatzes:

Sind bei n Punkten einer Ebene $2(n-4)$ von einander unabhängige Doppelverhältnisse gegeben, so sind auch alle übrigen auf Verbindungsgraden dieser n Punkte enthaltenen Doppelverhältnisse als gegeben oder als Funktionen jener $2(n-4)$ Doppelverhältnisse zu betrachten.

Wie dieser Satz für die specielleren Verwandtschaften der Affinität, Gleichheit, Aehnlichkeit und Aehnlichgleichheit entsprechender Weise zu modificiren ist, darüber, sowie über die Natur der hieraus entspringenden Aufgaben im Allgemeinen ist zu vergleichen der Baryc. Calcul §§. 141, 143, 157, 164, 247. Für die aus der Verwandtschaft der Affinität, Gleichheit und Collineation entspringenden Classen von Aufgaben sind zugleich an den betreffenden Stellen sehr beachtenswerthe und interessante Beispiele anzutreffen.

Berichtigungen.

S. 25 Zeile 9 v. o. vor die Worte: Setzt man etc. ist die Abschnittszahl 2) zu setzen.

S. 80 Z. 12 v. o. ist §. 66 vor „Lehrsatz“ etc. hinzuzufügen.

S. 85 Z. 3 v. u. statt $(CAB, B'C'A)$ zu lesen: $(CAB, B'C'A')$.

S. 93 Z. 6 v. u. ist nach den Worten: „bestimmt werden kann“ hinzuzufügen: und umgekehrt ist daraus abzunehmen, dass auch zu A, B, A', B' der Punkt O jederzeit sich wird bestimmen lassen (vergl. §. 77, 3).

S. 97 der zweite Ausdruck unter B^{**} Z. 14 v. u. muss statt $(A'BE, BAB')$ heissen: $(A'BE, EAB')$.

S. 101 Z. 6 v. o. statt EO und OF zu lesen: OE und OF.

